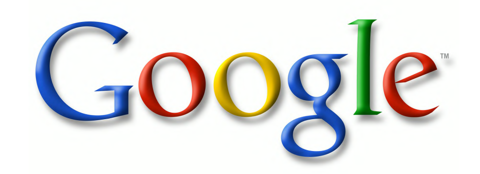


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

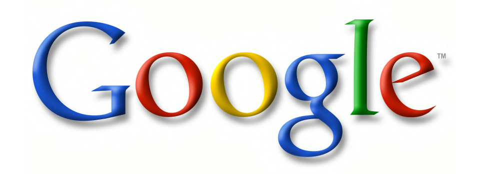
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

QA
453
.H518e
1907

J. HENRICI

UND

B 455666

P. TREUTLEIN

LEHRBUCH DER ELEMENTAR-GEOMETRIE

II. TEIL · 3. AUFLAGE

P. P.

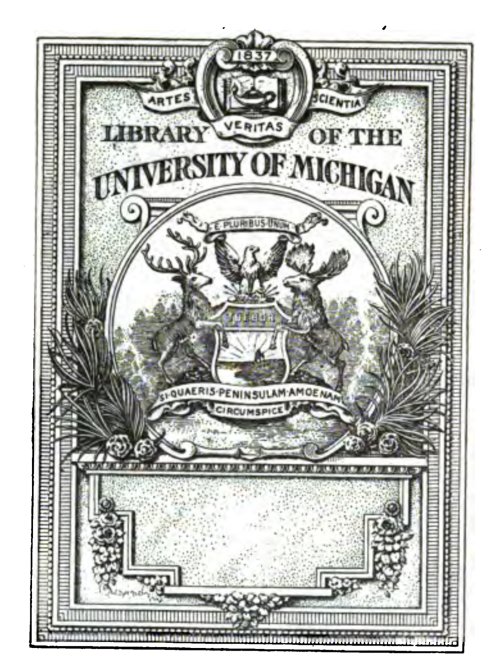
Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematik**, der **Naturwissenschaften** und **Technik** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter dieser Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, daß bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes auch meine weiteren Unternehmungen Lehrenden und Lernenden in Wissenschaft und Schule jederzeit förderlich sein werden. **Verlagsanerbieten** gediegener Arbeiten auf einschlägigem Gebiete werden mir deshalb, wenn auch schon gleiche oder ähnliche Werke über denselben Gegenstand in meinem Verl

Unter anz besonders
die von gen, Leipzig,
nchen un **thematischen**
issenscha und Algebra,
e Analysis Geodäsie und
eophysik n Schlußband
eschichte, **französische**
Ausgabe, vo inen begonnen.
Weitest n und natur-
wissenschaftl : Die **Mathe-**
matischen chrift für Ge-
schichte der **Mathematik**
und Physi **tiker-Vereini-**
gung, di , Organ für
angewandte **n und natur-**
wissensch **wissenschaft-**
lichen Blät **hafts-Biologie**,
die **Monat** **terricht aller**
Schulgattu **l und Erde**,
illustrierte

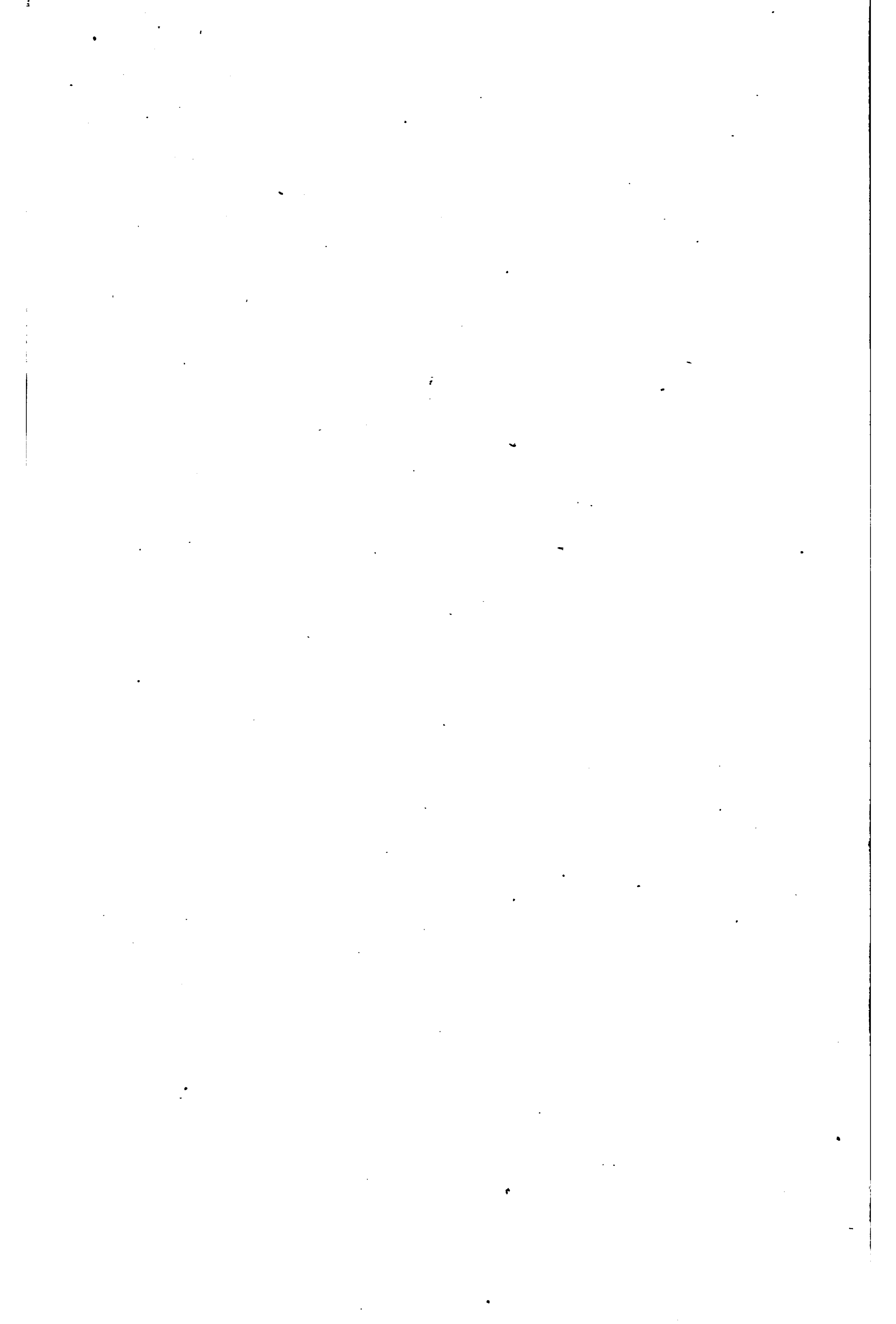
Seit 18 **buchhandlung**
B. G. Teub tteilungen", die in 30000 Exemplaren im In- und Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, das meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags durch ausführliche Selbstanzeigen der Verfasser in Kenntnis setzen. **Die Mitteilungen werden jedem Interessenten auf Wunsch regelmäßig bei Erscheinen umsonst und postfrei von mir übersandt. Das ausführliche „Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften, Technik nebst Grenzwissenschaften"** 101. Ausgabe, mit eingehender systematischer und alphabetischer Bibliographie und einem Gedenktagebuch für Mathematiker, 10 Bildnissen sowie einem Anhange, Unterhaltungsliteratur enthaltend. [CXXXI, 392 u. 92 S.] g
Interessenten umsonst und postfrei zur Verfügung.

LEIPZIG, Poststraße 3. **B. G**

M. V. b. 80 : 808.



MATHEMATICS
QA
453
.H518l
1907



LEHRBUCH

DER

ELEMENTAR-GEOMETRIE

VON

J. HENRICI, UND **P. TREUTLEIN,**

PROFESSOR AM GYMNASIUM ZU HEIDELBERG.

DIREKTOR DES REALGYMNASIUMS MIT GYMNASIALABTEILUNG KARLSRUHE.

ZWEITER TEIL.

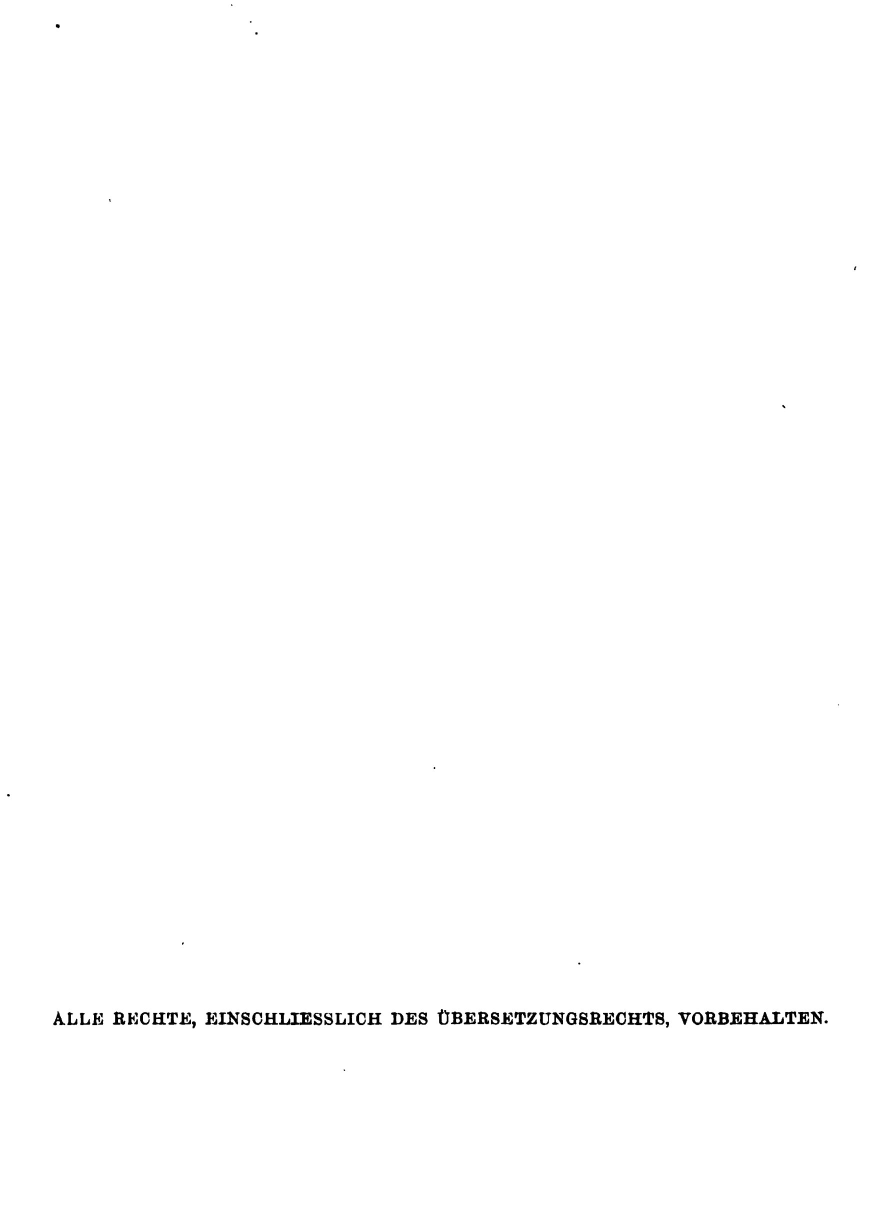
ÄHNLICHE UND PERSPEKTIVE ABBILDUNG IN DER EBENE (KEGELSCHNITTE), BERECHNUNGEN DER EBENEN GEOMETRIE (TRIGONOMETRIE) NEBST EINER AUFGABENSAMMLUNG.

DRITTE AUFLAGE.

MIT 185 FIGUREN IN HOLZSCHNITT UND EINEM KÄRTCHEN.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1907.



ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort.

An die im ersten Teil behandelten deckungsfähigen Gebilde der Ebene reihen sich in diesem zweiten Teil solche an, die so gelegt werden können, daß sie von einem Punkt aus gesehen sich zu decken scheinen, also die ähnlichen und perspektiven Figuren. Einige Veränderungen in der Anordnung der neuen Auflage haben den Zweck, das Buch für den Schulgebrauch bequemer zu machen. In jedem Abschnitt wurde das, was als fester Bestand des Unterrichts unumgänglich notwendig ist, vorangestellt, woran sich dann erst die Erweiterungen für eine gründlichere Behandlung des Stoffes anschließen. Dementsprechend wurden auch die Begriffe zunächst enger gefaßt und dann dem Bedürfnis entsprechend erweitert. So findet sich in der ersten Abteilung, die von den Verhältnissen bei den Abbildungen handelt, der Begriff der Ähnlichkeit zunächst beschränkt auf die Ähnlichkeit der Dreiecke, während der allgemeine Begriff der ähnlichen Abbildung erst im dritten Kapitel auftritt. Die beiden Begriffsbestimmungen der ähnlichen und der perspektiven Abbildung erhielten eine wesentlich übereinstimmende Fassung, so daß die Verwandtschaft beider Abbildungsarten sowohl in diesen Bestimmungen, als auch in den Ableitungen aus ihnen deutlich hervortritt. Dabei wurde die Überbestimmung der Lage der Punkte vermieden, wie sie z. B schon in der seither gebrauchten Forderung liegt, daß das Bild jeder Geraden wiederum eine Gerade sein solle.

In der zweiten Abteilung, die von den Berechnungen handelt, wird der Begriff der Winkelfunktion erst beim Übergang zu dem schiefwinkeligen Dreieck auf die stumpfen Winkel ausgedehnt und dann wieder auf überstumpfe Winkel beim Übergang zu Koordinaten und zur Polygonometrie.

Hierdurch kamen an den Schluß der beiden Abteilungen die Abschnitte, die erst in den oberen Klassen zu behandeln sind. Die erste Abteilung schließt mit den Kegelschnitten, die zweite mit der Anwendung der Winkelfunktionen auf Koordinaten und auf die Arithmetik und letztere selbst wieder mit der goniometrischen Darstellung der komplexen Zahlen.

194455

Aus der ersten Abteilung wird wohl der ganze Abschnitt über perspektive Abbildung ebener Figuren in ihrer Ebene am besten in den oberen Klassen parallel behandelt mit der perspektiven Abbildung von einer Ebene auf eine andere (im dritten Teil der Geometrie), zumal man hier doch gezwungen ist, bei den Darstellungen der letzteren Abbildung auf der Wandtafel oder dem Zeichenblatt immer von jener Art der Abbildung Gebrauch zu machen. Bei dieser Gegenüberstellung beider Abbildungsarten läßt sich dann zeigen, daß die allgemeinere und umfassendere Anschauung die natürlichere ist und deshalb häufig auf einfacherem Wege zu den Folgerungen führt.

Dabei kann noch das Kapitel (V) über perspektive Punktreihen und Strahlenbüschel übergangen werden; wir wollten es nicht weglassen, da es den Weg zu anderen Gebieten der neueren Geometrie eröffnet.

Druckfehler.

S. 40 Zeile 10 von unten lies $\frac{AX}{XB}$ statt $\frac{XB}{AX}$.

S. 62 Zeile 22 von oben lies je statt ze.

S. 104 Zeile 19 von unten lies c : d statt c.

S. 158 Zeile 15 von oben lies $\delta - \alpha$ statt $\delta - x$.

Inhaltsverzeichnis.

Erste Abteilung.

Streckenverhältnisse und Abbildung in der Ebene.

Einleitung: Verhältnisse von Strecken und Verhältnis-Gleichungen.

I. Abschnitt.

Einfache Verhältnisse bei ähnlicher Abbildung.

Erstes Kapitel: Verhältnisse von Strecken im Strahlenbüschel mit Parallelen.

Zweites Kapitel: Produkte von Strecken, im Zweistrahl mit gewendet parallelen Geraden und dem Kreis.

Drittes Kapitel: Ähnliche Abbildung.

II. Abschnitt.

Zusammengesetzte Verhältnisse bei der Abbildung mit einer Bildachse.

Zweite Abteilung.

Berechnung der Größen der ebenen Geometrie.

III. Abschnitt.

Berechnung von Strecken, Flächen und Bögen.

Übungsaufgaben.

Aufgaben zur ersten Abteilung.

Aufgaben zur zweiten Abteilung.

Erste Abteilung.

Streckenverhältnisse und Abbildung in der Ebene.



Einleitung.

Verhältnisse von Strecken und Verhältnis-Gleichungen.

§ 1. Messung und Verhältnis von Strecken.

1. Beim Vergleichen zweier Strecken ist die erste Unterscheidung die, ob sie gleich oder ungleich sind. Bei ungleichen Strecken läßt sich auf der größeren a die kleinere b abtragen; der hierbei bleibende Rest gibt an, um wieviel a größer ist als b. — Will man dagegen die Zahl bestimmen, wie oft eine Strecke in einer anderen enthalten ist, so geschieht dies durch das Messen, d. h. es wird die kleinere Strecke b anschließend so oft als möglich auf der größeren a abgetragen. Das Ergebnis einer Messung ist eine reine (unbenannte) Zahl, die Verhältniszahl. Daß eine Strecke a durch eine Strecke b gemessen werden und daß die Verhältniszahl beider Strecken bestimmt werden soll, wird ausgedrückt durch $a:b$ oder $\frac{a}{b}$; man liest dies: „das Verhältnis von a zu b“.

2. Der einfachste Fall beim Messen ist der, daß kein Rest übrig bleibt; man nennt dann die Strecke b, die in einer anderen Strecke a ohne Rest aufgeht, ein Maß dieser Strecke a; dagegen heißt a ein Vielfaches von b.

Fig. 1.

In diesem Falle ist die Verhältniszahl eine ganze Zahl. Es ist z. B. (Fig. 1)

$$\frac{a}{b} = 3, \qquad \text{somit} \qquad a = 3b.$$

a) Es sei b ein beliebiges Maß von a, etwa $a = \alpha \cdot b$ (wo α eine ganze Zahl). Dann läßt sich auch ein Vielfaches von a, etwa na, durch b ohne Rest messen, weil ja

$$na = n\alpha \cdot b \qquad \text{oder} \qquad \frac{na}{b} = n\alpha.$$

Also: *Jedes Maß einer Strecke ist auch Maß eines Vielfachen dieser Strecke.*

b) Umgekehrt: Wenn b ein Maß von a ist, etwa $a = \alpha \cdot b$,
und wenn c ein Maß von b ist, etwa $b = \beta \cdot c$,
so ist c auch ein Maß von a;

denn es ist $$a = \alpha \cdot b = \alpha \cdot (\beta \cdot c),$$

somit: $$\frac{a}{c} = \alpha\beta.$$

Also:

Jedes Maß des Maßes einer Strecke ist auch Maß dieser Strecke selbst.

3. Beim Messen einer Strecke a durch eine andere b kann auch ein Rest $r_1 < b$ bleiben. Dann ist b mehr als α-mal, aber weniger als $(\alpha + 1)$ mal in a enthalten, d. h. $\alpha \cdot b < a < (\alpha + 1)\, b$. Wenn man nun die Strecke b in β gleiche Teile zerlegt (I. T. § 13,2 d), so kann ein solcher Teil m möglicherweise auch in a geradezu α-mal enthalten sein; eine solche Strecke m heißt ein gemeinsames Maß der Strecken a und b.

a

b

m

Fig. 2.

So sei z. B. in Fig. 2

$$a = 5m, \qquad b = 3m;$$

hier ist:

$$m = \frac{1}{3} b, \quad \text{also } a = 5 \cdot \frac{1}{3} b = \frac{5}{3} b, \quad \text{deshalb } \frac{a}{b} = \frac{5}{3},$$

d. h. das Verhältnis der Strecken ist in solchem Fall ein Bruch, und zwar ein unechter Bruch, wenn $a > b$, dagegen ein echter Bruch, wenn $a < b$ ist. Im letzten Beispiel ist:

$$m = \frac{1}{5} a, \quad \text{also } b = 3 \cdot \frac{1}{5} a = \frac{3}{5} a, \quad \text{deshalb } \frac{b}{a} = \frac{5}{3}.$$

Allgemein: wenn

$$a = \alpha m,$$
$$b = \beta m,$$

so ist $$\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{dagegen} \quad \frac{b}{a} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Dieses letztere Verhältnis heißt das umgekehrte Verhältnis in Bezug auf das erstere.

Wenn dagegen bei der Messung von a durch m ein Rest $< m$ übrig bleibt, so ist zwar

$$b = \beta m, \qquad \text{aber:} \qquad \alpha m < a < (\alpha + 1) m;$$

daher

$$\frac{\alpha m}{\beta m} < \frac{a}{b} < \frac{(\alpha + 1) m}{\beta m}$$

oder

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{a}{b} < \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\beta}\right).$$

Das Verhältnis der beiden Strecken $\frac{a}{b}$ ist also annähernd gleich der Zahl $\frac{\alpha}{\beta}$, wobei der Unterschied $< \frac{1}{\beta}$ ist. Da man nun β beliebig groß nehmen, also $\frac{1}{\beta}$ beliebig klein machen kann, so ergibt sich:

Das Verhältnis zweier Strecken läßt sich immer durch eine reine Zahl ausdrücken und zwar entweder genau oder annähernd mit mehr oder weniger Genauigkeit.

4. a) *Mit dem gemeinsamen Maß m zweier Strecken a und b läßt sich auch deren Summe oder Unterschied messen;* denn wenn $a = \alpha m$, $b = \beta m$, so ist $a \pm b = (\alpha \pm \beta) m$.

Wenn nun b auf a α_1-mal angetragen werden kann, bis ein Rest $r_1 < b$ übrig bleibt, so ist r_1 der Unterschied der Strecken a und $\alpha_1 b$. Das gemeinsame Maß m von a und b geht auch in dem gemessenen Teil $\alpha_1 b$ auf (nach $3a$), somit auch im Rest r_1; es ist nämlich

$$r_1 = a - \alpha_1 b = (\alpha - \alpha_1 \beta) m.$$

Also gilt der Satz:

b) *Ein gemeinsames Maß zweier Strecken ist auch Maß des Restes, der beim Messen der größeren durch die kleinere übrig bleibt,*

— und umgekehrt (wie ebenso nachzuweisen ist):

c) *Jedes Maß der kleineren von zwei Strecken, das zugleich ein Maß des Restes der Messung der größeren durch die kleinere ist, ist auch ein Maß der größeren Strecke.*

d) Dieser Satz bietet ein Mittel, ***das größte gemeinsame Maß zweier Strecken a und b zu bestimmen.*** Dieses muß nämlich auch Maß von b und r_1 sein, d. h. die Aufgabe ist auf die gleiche, aber mit kleineren Strecken zurückgeführt. Ergibt nun b durch r_1 gemessen den Rest r_2, ist also $b = \alpha_2 r_1 + r_2$, so muß auch r_2 das verlangte größte gemeinsame Maß enthalten; also ist jetzt die Messung mit r_1 und r_2 weiter zu führen: $r_1 = \alpha_3 r_2 + r_3$,
$r_2 = \alpha_4 r_3 + r_4$ u. s. w. Wenn

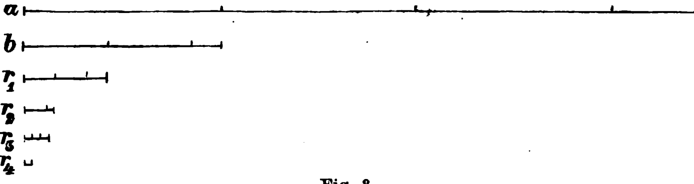


Fig. 3.

bei der Fortsetzung dieses Verfahrens einmal kein Rest mehr übrig bleibt, also wenn z. B. $r_3 = \alpha_5 r_4$, d. h. wenn der letzte Rest r_4 Maß des vorletzten r_3 ist, so ist er nach c) auch ein Maß der vorhergehenden Reste r_2, r_1, er ist also schließlich auch ein Maß von b und a; er

ist somit das größte gemeinsame Maß, da er jedes Maß von a und b enthalten muß.

Wenn im Beispiel der Fig. 3:

$$\begin{aligned} a &= 3b + r_1 \\ b &= 2r_1 + r_2 \\ r_1 &= 2r_2 + r_3 \\ r_2 &= r_3 + r_4 \\ r_3 &= 3r_4, \end{aligned}$$

so ist:

$$\begin{aligned} r_2 &= 3 \cdot r_4 + r_4 = 4r_4 \\ r_1 &= 2 \cdot 4r_4 + 3r_4 = 11r_4 \\ b &= 2 \cdot 11r_4 + 4r_4 = 26r_4 \\ a &= 3 \cdot 26r_4 + 11r_4 = 89r_4. \end{aligned}$$

Somit ist $r_4 = \frac{1}{26}b$, also wird $a = 89 \cdot \left(\frac{1}{26}b\right)$,

deshalb $\frac{a}{b} = \frac{89}{26}$ und auch $\frac{b}{a} = \frac{26}{89}$.

Es ist auch

$$\frac{a}{b} = 3 + \frac{r_1}{b}, \quad \frac{b}{r_1} = 2 + \frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{r_1}{r_2} = 2 + \frac{r_3}{r_2}, \quad \frac{r_2}{r_3} = 1 + \frac{r_4}{r_3}, \quad \frac{r_3}{r_4} = 3;$$

hieraus folgt:

$$\frac{a}{b} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}.$$

Das Verhältnis von a zu b kann also durch einen Kettenbruch dargestellt werden.

5. Bei diesem Verfahren, das gemeinsame Maß zweier Strecken zu bestimmen, ist sehr bald ein meßbarer Rest zwar nicht mehr wahrnehmbar, aber doch vorhanden. Es läßt sich beweisen, daß in manchen Fällen, mag man das Verfahren auch noch so weit fortsetzen, gleichwohl stets ein Rest übrig bleiben muß, wenn dieser auch bald so klein ist, daß er nicht mehr gemessen werden kann. Ein solcher Fall tritt z. B. ein, wenn man (Fig. 4) die Eckenlinie AC eines Quadrates $ABCD$ durch dessen Seite AB messen soll: man trägt, um dies zu zeigen, auf AC die Strecke $AX = AB$ ab und zieht $XY \perp AC$; dann ist der Rest $XC = XY$ (da CXY ein gleichgeneigtes Dreiseit ist) und $XY = YB$ (als Berührende vom Punkte Y an den Kreis). Der Rest XC läßt sich neben BY noch ein zweites Mal auf die Seite BC auftragen nach YX_1. Dasselbe Verfahren läßt sich aber nun in dem $\triangle\ CXY$ mit dem zweiten Rest $X_1C = X_1Y_1 = Y_1X$ auf dem ersten XC wiederholen u. s. f. ohne Ende, da sich immer wieder gleichschenkelige Dreiecke wie ABC und CXY ergeben müssen. Es läßt sich also AB auf AC 1-mal, der Rest XC auf BC

oder AB 2-mal, der Rest X_1C auf dem vorhergehenden wieder 2-mal u. s. f. ohne Ende abtragen. Hiernach gilt: *Seite und Eckenlinie eines Quadrates haben kein gemeinsames Maß.*

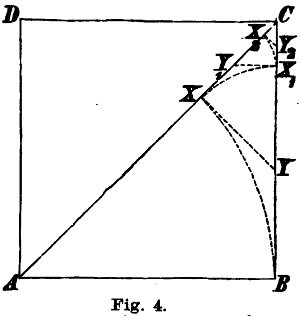


Fig. 4.

(Zwei Strecken, die ein gemeinsames Maß haben, heißen auch kommensurabel, dagegen zwei Strecken ohne gemeinsames Maß heißen inkommensurable Strecken).

6. Indem man bei dieser Art des Aufsuchens des größten gemeinsamen Maßes schon den 3., 4. oder erst einen späteren Rest vernachlässigt, gelangt man zu einer Reihe von Verhältniszahlen, die in wachsendem Grade von Genauigkeit das Ergebnis der Messung darstellen.

Das Verhältnis zweier Strecken ohne gemeinsames Maß läßt sich nur annähernd durch die Einheit und deren Bruchteile ausdrücken, d. h.:

Das Verhältnis zweier Strecken ohne gemeinsames Maß wird durch eine Irrationalzahl ausgedrückt.

Bei obigem Beispiel in 5 (Fig. 4) ist:

$$\frac{AC}{AB} = 1 + \frac{XC}{BC}, \quad \frac{BC}{XC} = 2 + \frac{X_1C}{XC}, \quad \frac{XC}{X_1C} = 2 + \frac{X_2C}{X_1C}, \text{ u. s. f.}$$

Daher gibt ein unendlicher periodischer Kettenbruch das Verhältnis an, nämlich im Beispiel:

$$\frac{AC}{AB} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}},$$

und die Zahlen, die näherungsweise das Verhältnis darstellen, sind der Reihe nach:

$$1 + \frac{1}{2} = 1{,}5; \quad 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = 1\frac{2}{5} = 1{,}4; \quad 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = 1\frac{5}{12} = 1{,}416$$

u. s. f. Setzen wir den wahren Wert der Verhältniszahl $= x$, so ist

$$x - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2} \cdots}} \qquad \text{oder} \qquad x - 1 = \frac{1}{2 + (x - 1)};$$

hieraus folgt $\qquad x^2 = 2, \qquad$ also $\qquad x = \sqrt{2}.$

7. Wenn $\qquad a = \alpha \cdot b, \qquad$ also $\qquad \frac{a}{b} = \alpha,$

so ist auch $\qquad va = v \cdot \alpha b = \alpha \cdot vb,$

somit
$$\frac{va}{vb} = \alpha = \frac{a}{b};$$

d. h.: *Das Verhältnis zweier Strecken ist gleich dem Verhältnis gleicher Vielfachen oder auch gleicher Bruchteile der Strecken.*

8. Werden die Verhältnisse beliebiger Strecken zu einer fest gewählten Längeneinheit bestimmt, so erhält man die Verhältniszahlen $\frac{a}{1}, \frac{b}{1}, \frac{c}{1}$, d. h. die bezüglichen Längenzahlen. Diese sollen der Kürze wegen in der Folge bloß durch a, b, c bezeichnet werden; dann kann man mit diesen Zahlen alle Rechnungsarten durchführen. Das Zu- und Abzählen dieser Längenzahlen entspricht der im I. Teil behandelten Darstellung der Summen und Unterschiede von Strecken. Das Produkt zweier solchen Längenzahlen wird der Kürze wegen einfach als das Produkt der Strecken bezeichnet, und es läßt sich geometrisch deuten als Flächeninhalt des Rechtecks, dessen Seiten die Längenzahlen darstellen (vgl. I. Teil § 47 und II. Teil § 26).

9. Wie von 2 Strecken läßt sich auch das Verhältnis von irgend zweien, mit einerlei Maß meßbaren Größen bestimmen, z. B. das Verhältnis zweier Winkel oder zweier Flächen; es ist gleich dem Verhältnis der beiden Zahlen, die sich bei ihrer Messung ergeben.

§ 2. Verhältnis-Gleichungen.

1. Wenn das Verhältnis zweier Strecken a und b ebenso groß ist wie das Verhältnis zweier anderen Strecken a_1 und b_1, so gibt die Gleichsetzung beider Verhältnisse eine Verhältnisgleichung (Proportion):
$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$$
oder
$$\boldsymbol{a : b = a_1 : b_1}$$
[gelesen: a (verhält sich) zu b wie a_1 zu b_1].

Die vier Glieder, welche die Verhältnisgleichung bilden, heißen der Reihe nach ihr erstes, zweites, drittes und viertes; das erste und vierte Glied heißen auch die äußeren, das zweite und dritte die inneren Glieder; das erste und dritte Glied werden entsprechende (proportionale) Glieder genannt, ebenso das zweite und vierte.

Da das Verhältnis durch reine (unbenannte) Zahlen dargestellt wird, so kann auch das Verhältnis zweier Strecken dem Verhältnis zweier Flächen, zweier Winkel oder zweier Bögen gleich sein.

2. Die Umformung von Verhältnisgleichungen kann erfolgen nach einigen Regeln, die hier des häufigen Gebrauchs wegen Platz finden.

Es sei

$$a = \alpha b, \quad a_1 = \alpha b_1; \quad \text{dann ist:} \quad \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}.$$

Wenn man für die Strecken ihre Längenzahlen setzt und beiderseits mit bb_1 vervielfacht, so folgt hieraus:

$$\boldsymbol{a \cdot b_1 = a_1 \cdot b};$$

d. h.: ***In einer Verhältnisgleichung ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Produkte der inneren.***

3. Umgekehrt kann die Gleichheit zweier Produkte als eine Verhältnisgleichung dargestellt werden: man hat nur aus dem einen Produkt die äußeren, aus dem andern die inneren Glieder zu entnehmen. Aus der Gleichung $a \cdot b_1 = a_1 \cdot b$ ergeben sich hiernach folgende Verhältnisgleichungen:

$a : b = a_1 : b_1$	$b : a = b_1 : a_1$	$a_1 : a = b_1 : b$	$b_1 : b = a_1 : a$
$a : a_1 = b : b_1$	$b : b_1 = a : a_1$	$a_1 : b_1 = a : b$	$b_1 : a_1 = b : a.$

Hieraus ist ersichtlich:

In einer Verhältnisgleichung lassen sich vertauschen α) die inneren Glieder, β) die äußeren, γ) die inneren mit den äußeren.

4. Ferner ergibt sich

$$\frac{va}{b} = v\alpha = \frac{va_1}{b_1} \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{v \cdot a : b = v \cdot a_1 : b_1}$$

und

$$\frac{a}{vb} = \frac{\alpha}{v} = \frac{a_1}{vb_1} \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{a : v \cdot b = a_1 : v \cdot b_1},$$

d. h.:

Aus einer Verhältnisgleichung kann man durch Vervielfachen oder Teilen je eines inneren und eines äußeren Gliedes mit derselben Zahl eine neue Verhältnisgleichung ableiten.

5. a) Weiter folgt, daß:

$$\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{a_1}{b_1} \pm 1 \quad \text{oder} \quad \frac{a \pm b}{b} = \frac{a_1 \pm b_1}{b_1}.$$

Ebenso:

$$\frac{a \pm b}{a} = \frac{a_1 \pm b_1}{a_1}. \qquad \text{Also:}$$

In einer Verhältnisgleichung verhält sich $\left\{\begin{matrix}\textit{die Summe}\\ \textit{der Unterschied}\end{matrix}\right\}$ *der beiden ersten Glieder zu einem derselben, wie die entsprechenden Ausdrücke der beiden letzten Glieder.*

b) Ferner folgt durch Teilung der so entstandenen zwei Gleichungen

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{a_1 + b_1}{a_1 - b_1}, \qquad \text{d. h.:}$$

In einer Verhältnisgleichung verhält sich die Summe der beiden ersten Glieder zu ihrem Unterschied, wie die Summe der beiden letzten Glieder zu ihrem Unterschied.

6. Nun seien mehrere Verhältnisse einander gleich, etwa

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}, \qquad \text{nämlich jedes} = \alpha;$$

also ist $\quad a = \alpha b, \quad a_1 = \alpha b_1, \quad a_2 = \alpha b_2,$

somit auch $\quad a + a_1 + a_2 = \alpha(b + b_1 + b_2)$

und $\quad \frac{a + a_1 + a_2}{b + b_1 + b_2} = \alpha = \frac{a}{b},$ d. h.:

Sind mehrere Verhältnisse gleichgroß, so verhält sich auch die Summe aller ihrer ersten Glieder zur Summe aller ihrer zweiten wie irgend ein erstes zum zugehörigen zweiten.

Zusatz: Wenn $a:b = c:d$ und $a_1:b_1 = c_1:d_1$, so erhält man dadurch, daß man gleiche Größen mit eben solchen vervielfacht oder teilt, die Gleichheit der zusammengesetzten Verhältnisse

$$aa_1:bb_1 = cc_1:dd_1 \qquad \text{oder} \qquad \frac{a}{b}:\frac{a_1}{b_1} = \frac{c}{d}:\frac{c_1}{d_1}.$$

Wenn $x:y = a:b$ und $y:z = b:c$, so pflegt man auch beide Gleichungen zusammenzuziehen zu einer einzigen Gleichung mit sog. fortlaufenden Verhältnissen:

$$x:y:z = a:b:c.$$

7. Wenn drei Strecken a, b, c gegeben sind, und wenn zu ihnen in dieser ihrer Reihenfolge das vierte Glied x gefunden werden soll, das der Gleichung $a:b = c:x$ entspricht, so ist das Verhältnis $\frac{b}{a}$ und damit auch $x = \frac{b}{a} \cdot c$ bestimmt, d. h.:

Durch drei Glieder einer Verhältnisgleichung ist das vierte [die sog. vierte Proportionale] eindeutig bestimmt (vgl. die in § 6 folgende Bestimmung durch Zeichnung).

8. Im besonderen Falle können in einer Verhältnisgleichung die beiden mittleren Glieder gleich groß sein; dann heißt sie eine stetige Verhältnisgleichung:

$$a:x = x:b.$$

Hierbei heißt x das geometrische Mittel zu a und b [oder die mittlere geometrische Proportionale zu a und b]. Dann ist:

$$x^2 = a \cdot b, \qquad \text{also} \qquad \mathbf{x = \sqrt{a \cdot b}}.$$

Hieraus folgt:

Das geometrische Mittel zweier Größen ist durch diese eindeutig bestimmt. (Bestimmung durch Zeichnung in § 10).

9. Unter dem harmonischen Mittel zu zwei Strecken a und b versteht man eine Strecke x, die der Gleichung entspricht:

$$(a - x):(x - b) = a:b\,, \quad \text{woraus}$$

$$x = \frac{2ab}{a+b} \quad \text{und} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right). \quad \text{Also:}$$

Das harmonische Mittel zweier Strecken ist eindeutig bestimmt. (Vgl. die Zeichnung in § 7, 7).

Die Pythagoreer nannten $(a - x):(x - b) = a:b$ die harmonische Verhältnisgleichung, weil sich (mit einer gewissen Beschränkung) harmonisch klingende Töne ergeben, wenn von einer gespannten Saite solche Teile a, x, b schwingen, die jener Gleichung entsprechen [z. B. 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ als Prim, Quinte, Oktave oder 1, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$ als Prim, Terz, Quinte].

Anmerkung. Wird das arithmetische Mittel von a und b durch A, das geometrische durch G, das harmonische durch H bezeichnet, so ist: $A:G = G:H$, und es gilt auch die Ungleichung: $A > G > H$.

I. Abschnitt.

Einfache Verhältnisse bei ähnlicher Abbildung.

Erstes Kapitel.

Verhältnisse von Strecken im Strahlenbüschel mit Parallelen.

§ 3. Der Zweistrahl mit zwei Parallelen.

1. Bei der Abbildung einer Figur werden (entsprechend der Ausbreitung des Lichtes) von einem Punkt S, dem Strahlpunkt, Strahlen nach den Punkten der Figur gezogen, und auf diesen Strahlen werden die entsprechenden Bildpunkte angenommen. Die vom Strahlpunkt ausgehenden Strecken eines Strahles, wie SA und SA_1, heißen Strahlstrecken.

Der einfachste Fall ist die Abbildung einer Strecke AB durch einen Zweistrahl SA und SB auf eine parallele Gerade A_1B_1. In diesem Falle gilt der Lehrsatz:

Im Zweistrahl mit zwei Parallelen verhalten sich die Abschnitte des einen Strahles wie die gegenüberliegenden des andern.

Wenn also $AB \| A_1B_1$, so wird behauptet, daß:

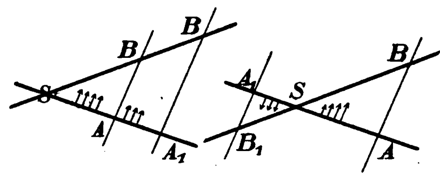


Fig. 5 a.

$$SA:AA_1 = SB:BB_1$$

und daß

$$SA:SA_1 = SB:SB_1.$$

Es werde erstens angenommen, SA und AA_1 haben ein gemeinsames Maß. Dieses lasse sich $x$mal auf SA und $y$mal auf AA_1 abtragen; dann zieht man durch die erhaltenen Teilpunkte die Parallelen zu AB, und teilt hierdurch auch SB_1 in gleiche Teile (I. Teil § 13, 2c und d), und es kommen x Teile auf SB und y Teile auf BB_1. Somit verhält sich:

$$SA:AA_1 = \quad x:y \quad = SB:BB_1,$$
$$SA:SA_1 = x:(x+y) = SB:SB_1.$$

Zweitens werde angenommen, SA und AA_1 haben kein gemeinsames Maß. Wird AA_1 in y gleiche Teile geteilt, von denen einer zwar mehr als $x$mal, aber weniger als $(x+1)$mal auf SA enthalten sei, so kann man wieder durch die Teilpunkte die Parallelen zu AB ziehen; dann wird auch BB_1 in y Teile, SB in $(x+1)$ Teile geteilt, die alle mit Ausnahme des letzten kleineren von gleicher Größe sind. Nun liegt der Wert des Verhältnisses $SA:AA_1$ zwischen $x:y$ und $(x+1):y$, und der Wert von $SB:BB_1$ liegt zwischen denselben Größen; demnach muß $\frac{SA}{AA_1} - \frac{SB}{BB_1}$ kleiner sein als $\frac{x+1}{y} - \frac{x}{y}$, d. h. kleiner als $\frac{1}{y}$. Je größer daher die Anzahl y der Teile genommen wird, um so kleiner wird der Unterschied $\frac{1}{y}$ beider Verhältnisse, und um so kleiner wird auch das zuletzt übrig bleibende Teilchen; die Werte beider Verhältnisse stimmen also um so mehr überein, je genauer sie bestimmt werden. Gerade dies entspricht aber dem Begriff der Gleichheit irrationaler Zahlen; somit ist auch für den zweiten Fall die obige Behauptung erwiesen.

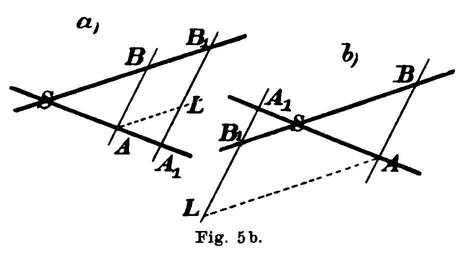


Fig. 5 b.

2. Satz 1 läßt sich auch auf das Verhältnis der parallelen Strecken anwenden, die der Zweistrahl begrenzt; man hat nur durch einen der vier Schnittpunkte, z. B. durch A, die Hilfsgerade $AL \| BB_1$ zu ziehen.

Dann ist im Zweistrahl A_1 (gemäß 1): $\quad LB_1 : A_1B_1 = AS : A_1S;$

aber $\quad LB_1 = AB \quad$ (I. Teil § 12, 1a),

somit auch: $AB : A_1B_1 = SA : SA_1$.

Ebenso verhält sich auch (1) $AB : A_1B_1 = SB : SB_1$.

Diese zwei Verhältnisgleichungen liefern den Satz:

Im Zweistrahl mit zwei Parallelen verhalten sich die Parallelstrecken wie die entsprechenden Strahlstrecken eines Strahles.

3. Umkehrung von 1: Man nehme an, es seien die Strahlen SA und SB eines Zweistrahls durch zwei Gerade AB und A_1B_1 so geteilt, daß verhältnisgleiche Strecken in entsprechender Lage einander gegenüberliegen, also so, daß $SA : SA_1 = SB : SB_1$. Will man dann durch A_1 die Parallele zu AB ziehen, so muß diese den Endpunkt des vierten Gliedes der durch SA, SA_1 und SB bestimmten Verhältnisgleichung treffen (1), d. h. die Parallele muß eben durch B_1 gehen oder mit A_1B_1 zusammenfallen. Sonach gilt der Satz:

Wenn zwei Gerade auf einem Zweistrahl gegenüberliegende Abschnitte von gleichem Verhältnis begrenzen, so sind sie parallel.

4. Als Umkehrung von 2 folgt in gleicher Weise: Wenn $AB \parallel A_1B_1$ und auf AA_1 ein Punkt S so liegt, daß $SA : SA_1 = AB : A_1B_1$, so muß der Strahl SB auch durch B_1 gehen, vorausgesetzt, daß sowohl SA und SA_1, als AB und A_1B_1 gleichgerichtet sind oder beide Strahlenpaare gegengerichtet.

§ 4. Ähnliche Dreiecke im Zweistrahl; Bedingungen der Ähnlichkeit von Dreiecken.

In dem Zweistrahl mit zwei Parallelen (Fig. 5a) liegen zwei Dreiecke SAB und SA_1B_1, die sowohl in den Winkeln übereinstimmen:

$$\angle S = S, \quad \angle A = A_1, \quad \angle B = B_1,$$

als auch in den Verhältnissen entsprechender Seiten, d. h. solcher, die jeweils gleichen Winkeln gegenüberliegen, also $SA : SB = SA_1 : SB_1$, $SA : AB = SA_1 : A_1B_1$, $SB : AB = SB_1 : A_1B_1$. Solche Dreiecke werden ***ähnliche Dreiecke*** genannt, $\triangle SAB \backsim SA_1B_1$ (vgl. § 11, 6).

Ähnliche Dreiecke stimmen in den Winkeln überein und im Verhältnis der Seiten, die gleichen Winkeln gegenüberliegen.

Von zwei Dreiecken, die in die angegebene Lage in einem Zweistrahl gebracht sind, sagt man: sie liegen ähnlich. In solche „ähnliche Lage" können aber immer zwei Dreiecke gebracht werden, sobald nur zweien der angegebenen Gleichungen entsprochen wird. Es gelten nämlich für die Ähnlichkeit der Dreiecke die folgenden Bedingungen, die verwandt sind denen der vollkommenen Übereinstimmung der Dreiecke (I. Teil § 23).

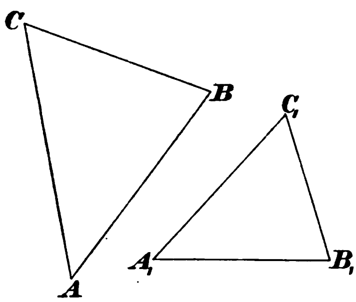
Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen:

1. in zwei Winkeln,

2. im Verhältnis zweier Seiten und in deren Zwischenwinkel,

3. in den Verhältnissen der drei Seiten,

4. im Verhältnis zweier Seiten und wenn von den entsprechenden Gegenwinkeln der eine in beiden Dreiecken gleich, der andre gleichartig (spitz oder stumpf) ist.



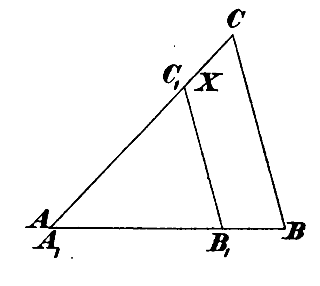


Fig. 6.

Zum Beweise legt man das eine Dreieck $A_1B_1C_1$ so in das andere ABC, daß die erste Seite A_1B_1 von A aus auf AB fällt und zieht dann aus der Annahme den Schluß, daß die zweite Seite A_1C_1 auf AC fällt und die dritte Seite $B_1C_1 \parallel BC$ wird. Dann gelten für beide Dreiecke obige Gleichungen, die die Ähnlichkeit der Dreiecke begründen. Die Annahme ist im

1. Fall: $A = A_1$, $B = B_1$.

Aus der ersten Gleichung folgt, daß A_1C_1 auf AC fällt, und aus der zweiten, daß $B_1C_1 \parallel BC$ ist.

2. Fall: $\angle A = A_1$, $AB : AC = A_1B_1 : A_1C_1$.

Beweis wie im ersten Fall.

3. Fall: $AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1$, $AB : AC = A_1B_1 : A_1C$.

Man zieht $B_1X \parallel BC$; dann verhält sich

$$AB : BC = A_1B_1 : B_1X, \qquad AB : AC = A_1B_1 : A_1X.$$

Aus der Vergleichung mit der Annahme folgt dann (§ 2, 7):

$$B_1X = B_1C_1, \quad A_1X = A_1C_1,$$

somit ist $\triangle A_1B_1C_1 \cong A_1B_1X$ und C_1 fällt auf X.

4. Fall: $\angle A = A_1$, $AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1$.

Aus der ersten Gleichung folgt, daß A_1C_1 auf AC fällt. Man zieht $B_1X \parallel BC$; dann verhält sich

$$AB : BC = A_1B_1 : B_1X.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt, daß $B_1X = B_1C_1$ ist. Dann fällt

entweder $B_1 C_1$ auf $B_1 X$, sodaß $\triangle A_1 B_1 C_1 \backsim ABC$, oder es ist $B_1 C_1 X$ ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem die Winkel $A_1 C_1 B_1$ und $A_1 X B_1$, der $= ACB$, einander zu zwei Rechten ergänzen, so daß sie nicht beide spitz oder beide stumpf sein können.

§ 5. Das Teilverhältnis einer Strecke. Der Strahlenbüschel mit Parallelen.

1. Von drei Punkten einer Reihe begrenzen irgend zwei eine Strecke AB, und der dritte C teilt diese Strecke innen oder außen.

Fig. 7.

Wir betrachten hierbei als „ersten Teil" der Strecke den Abschnitt von ihrem Anfangspunkt A bis zum Teilpunkt C und als „zweiten Teil" den Abschnitt vom Teilpunkt C bis zum Endpunkt B der Strecke. Das Verhältnis des so bestimmten ersten Abschnittes zu dem zweiten $\frac{AC}{CB}$ heißt das „Teilverhältnis der Strecke AB durch den Punkt C". Es ist positiv bei innerem Teilpunkt, negativ bei äußerem, da im ersten Falle beide Abschnitte gleichgerichtet, im letzteren gegengerichtet zu nehmen sind (I. Teil § 6, 6).

Einem durch Anfangs- und Endpunkt, Vorzeichen und Größe bestimmten Teilverhältnis einer Strecke entspricht ein einziger Teilpunkt.

Denn es sind dann die beiden fraglichen Abschnitte AC und CB nach Größe und Richtung bestimmt durch die Gleichungen:

$$AC + CB = AB \qquad \text{oder} \qquad AC - BC = AB$$

und

$$AC : CB = \text{dem Teilverhältnis } v.$$

2. Wird ein Strahlenbüschel S von zwei Parallelen durchschnitten, so entstehen zwei Punktreihen $ABCD$ und $A_1 B_1 C_1 D_1$, in denen sich verhält:

$$AB : A_1 B_1 = (SB : SB_1) = BC : BC_1$$
$$= (SC : SC_1) = CD : C_1 D_1,$$

also auch

Fig. 8.

$$AB : BC = A_1 B_1 : B_1 C_1, \qquad BC : CD = B_1 C_1 : C_1 D_1,$$

oder

$$AB : BC : CD = A_1 B_1 : B_1 C_1 : C_1 D_1.$$

Punktreihen, in denen die Verhältnisse der Strecken der Reihe nach übereinstimmen, heißen ***ähnliche Punktreihen,*** $ABCD \backsim A_1 B_1 C_1 D_1$; sie liegen ähnlich in einem Strahlenbüschel auf zwei Parallelen.

Faßt man AC und A_1C_1 als Strecken im Zweistrahl S auf und B und B_1 als ihre Teilpunkte, so gilt für diese:

Parallelstrecken im Zweistrahl werden durch einen dritten Strahl in gleichem Verhältnis geteilt.

3. Die Umkehrung dieses Satzes lautet:

Werden zwei Parallelstrecken durch je einen Punkt in gleichem Verhältnis geteilt, so gehen die Verbindungsgeraden der entsprechenden Grenz- und Teilpunkte durch einen Punkt.

Denn wenn auf zwei Parallelen die Punkte ABC und $A_1B_1C_1$ so angenommen werden, daß $AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1$, und wenn sich A_1A und B_1B in S schneiden, so muß SC auch durch C_1 gehen, da der Strahl nach 2 das vierte Glied der obigen Verhältnisgleichung begrenzen muß.

4. Als zweite Umkehrung von 2 folgt:

Wenn auf zwei Geraden drei Strahlen eines Punktes entsprechende Abschnitte von gleichem Verhältnis begrenzen, so sind die beiden Geraden parallel.

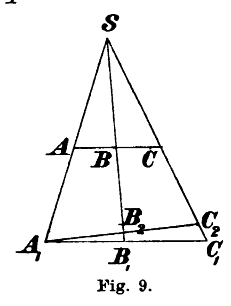


Fig. 9.

Es verhalte sich (Fig. 9)

$$AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1.$$

Wäre hier nicht A_1C_1, sondern etwa $A_1B_2C_2 \parallel ABC$,

so wäre $\quad AB : BC = A_1B_2 : B_2C_2$,

somit $\quad A_1B_1 : B_1C_1 = A_1B_2 : B_2C_2$,

also (nach § 3, 3) $B_1B_2 \parallel C_1C_2$; dies aber widerspricht der Annahme, daß B_2B_1B und C_2C_1C Strahlen eines Punktes S sind.

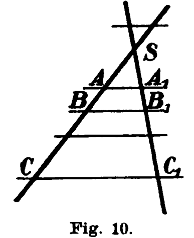
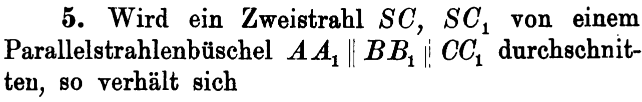


Fig. 10.



5. Wird ein Zweistrahl SC, SC_1 von einem Parallelstrahlenbüschel $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ durchschnitten, so verhält sich

$$AB : A_1B_1 = (SB : SB_1) = BC : B_1C_1,$$

also $$AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1.$$

Im Zweistrahl mit Parallelstrahlenbüschel verhalten sich die Abschnitte des einen Strahles wie die gegenüberliegenden Abschnitte des andern.

§ 6. Zeichnung der vierten Verhältnisstrecke.

1. Aufgabe: *Zu drei gegebenen Strecken a, b, c soll* ***das vierte Glied einer Verhältnisgleichung*** *gezeichnet werden,* d. h. man soll eine Strecke x suchen derart, daß

$$a : b = c : x.$$

a) Nach § 3, 1: In einem Zweistrahl trägt man vom Scheitel

aus auf dem einen Strahl das erste Glied, auf dem andern das zweite ab und verbindet deren Endpunkte. Von irgend einem Grenzpunkt des ersten Gliedes trägt man dann das dritte nach der einen oder andern Richtung des ersten Strahles ab und zieht durch den Endpunkt des dritten Gliedes die Parallele zu jener Verbindungsgeraden. Alsdann liegt das fragliche *vierte Glied* dem dritten gegenüber.

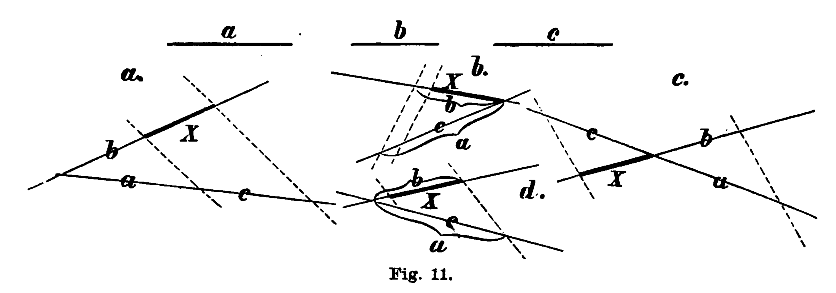


Fig. 11.

b) Nach § 3, 2: Auf dem einen Strahl eines Zweistrahls trägt man vom Scheitel aus das erste und zweite Glied an; das dritte Glied trägt man vom Endpunkt des ersten Gliedes so in den Zweistrahl ein, daß sein Endpunkt auf dem zweiten Strahl liegt. Zu der so erhaltenen Geraden zieht man durch den Endpunkt des zweiten Gliedes die Parallele; dann stellt deren ebenfalls vom Zweistrahl begrenzte Strecke das *vierte Glied* dar.

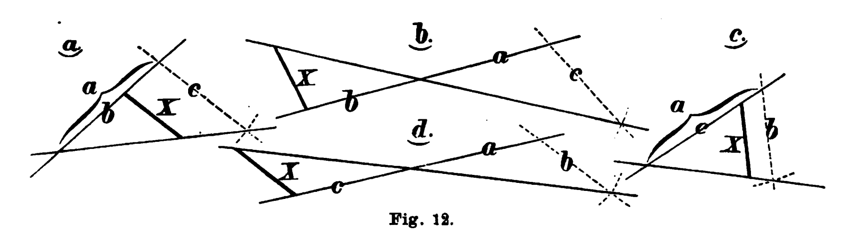


Fig. 12.

c) Nach § 5, 2: Man trägt auf der einen von zwei Parallelen von einem Punkt aus das erste und zweite Glied an, auf der anderen

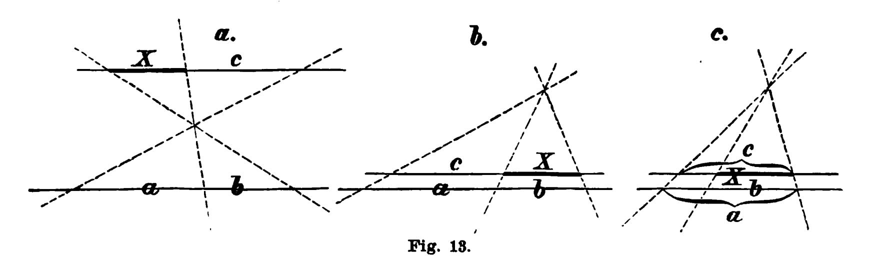


Fig. 13.

Parallelen das dritte Glied, verbindet die Endpunkte des ersten und dritten Gliedes und zieht durch den Schnittpunkt dieser Verbindungs-

geraden den Strahl nach dem Endpunkt des zweiten Gliedes. Das *vierte Glied* liegt dann dem zweiten gegenüber.

d) Nach § 5, 5: Auf einer Geraden trägt man von einem Punkt aus das erste und zweite Glied ab und zieht durch deren Grenzpunkte drei Parallele. Das dritte Glied trägt man in letztere so ein, daß es von denselben Parallelen wie das erste Glied begrenzt wird. Auf gleicher Geraden mit diesem dritten Gliede wird dann das *vierte Glied* von den Parallelen des zweiten Gliedes begrenzt.

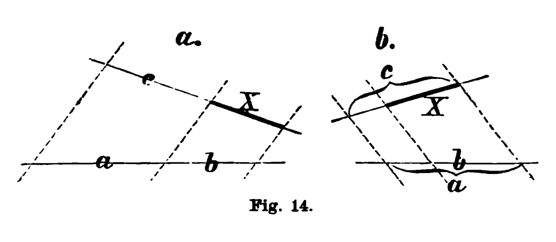


Fig. 14.

In allen diesen Zeichnungen kann die Lage des zweiten und dritten Gliedes vertauscht werden.

e) Ohne Winkelscheit, mit Zirkel und Lineal: Wenn $b < 2a$, bildet man aus den beiden ersten Gliedern ein gleichschenkeliges Dreieck (Fig. 15a), trägt auf dessen Schenkeln vom Scheitel aus das

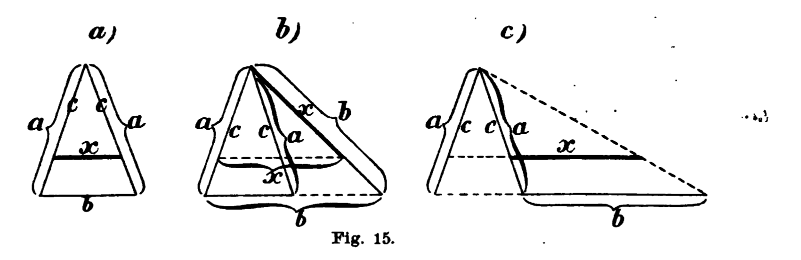


Fig. 15.

dritte Glied ab und verbindet die Endpunkte; die erhaltene Strecke ist das *vierte Glied.* — Wenn nicht $b < 2a$, so kann auch nach den Arten von Fig. 15, b und c gezeichnet werden.

2. In ähnlicher Weise wie die vierte Verhältnisstrecke zeichnet man das Vielfache und einen Bruchteil einer Strecke a, etwa

$$x = na; \qquad y = \frac{a}{n}, \qquad z = \frac{v}{n}a,$$

wo n und v reine ganze Zahlen sind: man nimmt von einem beliebigen Maßstab eine Einheit, dann n und v Einheiten und bestimmt das vierte Glied in:

$$1 : n = a : x, \qquad n : 1 = a : y \qquad \text{(vgl. I. Teil § 13d),}$$

und in $$n : v = a : z.$$

3. Aufgabe: *Durch einen Punkt ist zu einer Geraden die Parallele zu ziehen.* Nach § 3, 3 ergibt sich die Lösung mit Hilfe von Lineal und Maßstab, nämlich durch Abtragen von zwei in gleichem Verhältnis stehenden Abschnittpaaren.

§ 7. Teilung einer Strecke in gegebenem Verhältnis. Harmonische Teilung.

1. Aufgabe: *Eine Strecke AB soll im Verhältnis zweier gegebenen Strecken $p:q$* (z. B. 7 : 3) *geteilt werden,* d. h. man soll den Punkt C so bestimmen, daß

$$AC : CB = p : q \quad \text{ist.}$$

a) Nach § 3, 1: Man zieht einen Strahl durch A, trägt auf ihm $AX = p$, $XY = q$ ab, zieht YB und hierzu die Parallele durch X,

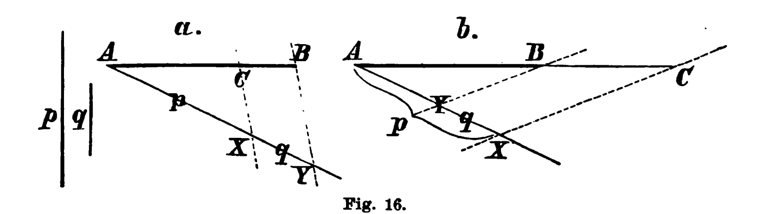


Fig. 16.

so gibt diese den Teilpunkt C. Man erhält den inneren oder äußeren Teilpunkt, je nachdem AX und XY in gleicher Richtung oder in entgegengesetzter Richtung abgetragen werden.

b) Nach § 3, 2: Man trägt auf zwei beliebigen Parallelen durch A und B die Strecken $AX = p$ und $BY = q$ ab, zieht XY, so gibt

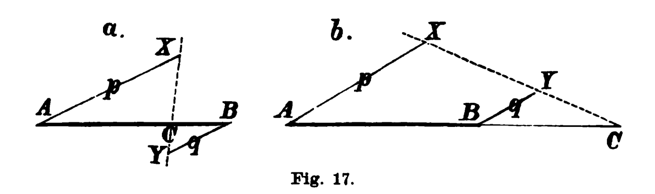


Fig. 17.

XY den Teilpunkt C, und zwar den inneren oder äußeren, je nachdem AX und BY gegengerichtet oder gleichgerichtet sind.

c) Nach § 5, 2: Man trägt auf einer zu AB Parallelen $XY = p$, $YZ = q$ ab, verbindet A mit X, B mit Z und zieht durch

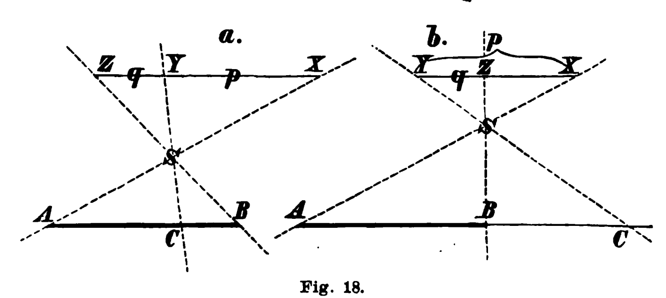


Fig. 18.

den entstehenden Schnittpunkt S den Strahl nach Y, so bestimmt dieser den Teilpunkt C.

Zusatz. *Soll eine Strecke im Verhältnis gegebener Zahlen geteilt werden*, so nimmt man mit einer beliebigen Strecke als Maßeinheit die den Zahlen entsprechenden Strecken und verfährt dann wie eben gezeigt.

2. Eine weitere Lösung der vorangehenden Aufgabe bietet der Satz:

Die Halbierende eines $\left.\begin{matrix}\textit{Innen-}\\ \textit{Außen-}\end{matrix}\right\}$ *Winkels eines Dreiecks teilt die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten.*

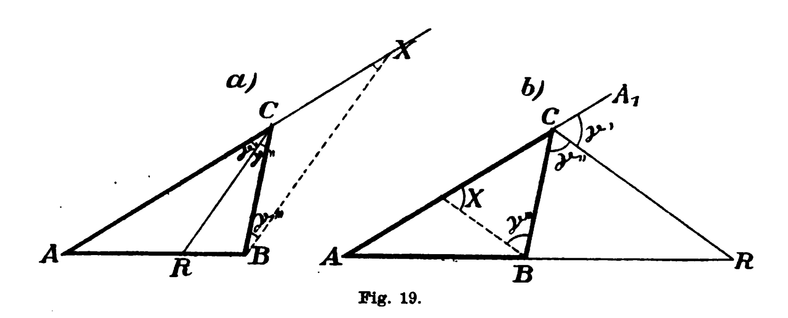


Fig. 19.

Im Dreieck ABC halbiere CR den Winkel C. Ziehe $BX \parallel CR$, so ist $\sphericalangle X = \gamma' = \gamma'' = \gamma'''$, somit $CX = CB$ und $AC : CB = AC : CX = AR : RB$ (in Fig. 19b $= - AR : RB$).

Zur Lösung der Aufgabe 1 zeichnet man also über AB aus p und q als Seiten (oder aus $2p$ und $2q$, oder aus $3p$ und $3q$) ein Dreieck ABC und halbiert dessen Winkel C.

3. Wird eine Strecke AB durch einen Punkt Q innen und durch einen Punkt R außen so geteilt, daß die Teilverhältnisse absolut genommen von gleicher Größe sind, wenn also

A B Q R

Fig. 20.

$$\frac{AQ}{QB} = -\frac{AR}{RB},$$

so heißt die Strecke ***harmonisch geteilt.*** Die Teilpunkte Q und R heißen (harmonisch) zugeordnete Punkte.

Aus der Annahme folgt auch, daß

$$\frac{QA}{AR} = -\frac{QB}{BR};$$

also sind auch auf der Strecke QR die Punkte A und B zugeordnete Punkte.

a) *Die Strecke zwischen zwei zugeordneten Teilpunkten einer Strecke wird durch die Grenzpunkte der letzteren selbst harmonisch geteilt.*

Die Grenzpunkte der Strecke und ihre so bestimmten Teilpunkte heißen deshalb ***vier harmonische Punkte.***

b) Da durch einen Teilpunkt das Teilverhältnis bestimmt ist, so ist es auch der zugeordnete Punkt (S. 15, § 5, 1).

Zu einem Teilpunkt einer Strecke gibt es immer nur einen harmonisch zugeordneten Punkt.

Auch wenn im Teilverhältnis der Anfangs- und der Endpunkt der Strecke AB vertauscht werden, ergibt sich kein anderer zugeordneter Punkt zu Q, da dieser Vertauschung einfach die Umkehrung der Bestimmungs-Gleichung entspricht:

$$AQ : QB = -AR : RB, \qquad BQ : QA = -BR : RA.$$

4. Ferner folgt aus $AQ : QB = AR : BR$, wenn M die Mitte von AB ist:

$$(AM + MQ) : (MB - MQ) = (AM + MR) : (MR - MB),$$

oder nach § 2, 5b, da $AM = MB$ ist:

$$AM : MQ = MR : AM,$$

oder $$\overline{AM}^2 = MQ \cdot MR,$$

A M Q B R

Fig. 21.

somit: *Das Quadrat der Hälfte einer Strecke ist gleich dem Produkt der Abstände zweier harmonisch zugeordneten Punkte von der Mitte der Strecke.*

5. Die gleiche innere und äußere Teilung einer Strecke wird durch die Vereinigung der beiden in Fig. 16 bis 19 einzeln gegebenen Zeichnungen ausgeführt. Wird z. B. in Fig. 17 von B aus q nach zwei gegengesetzten Seiten angetragen, so erhält man Q und R als zugeordnete Punkte. — In gleicher Weise kann benutzt werden der aus 2 sich ergebende Satz:

Eine Dreiecksseite wird durch die Halbierenden der Winkel der beiden anderen Seiten harmonisch geteilt.

6. Ebenso einfach ist die Lösung der Aufgabe: *Zu einem Teilpunkt einer Strecke den harmonisch zugeordneten Punkt zu bestimmen.*

Wenn Q auf AB gegeben, so zieht man $AX \parallel BY$ und durch Q die Gerade XQY, macht $BY_1 = BY$ (Fig. 22) und zieht Y_1XR. — Entsprechend erhält man Q, wenn R gegeben ist.

7. Dies ist zugleich die Lösung der Aufgabe (S. 11, § 2, 9), das harmonische Mittel zu 2 Strecken a und b zu bestimmen. Denn aus der harmonischen Verhältnisgleichung (Fig. 20) folgt:

$$(AR - QR) : (QR - BR) = AR : BR;$$

also ist QR das harmonische Mittel zu $AR = a$ und $BR = b$ (wenn $a > b$), indem dann

$$\frac{a-x}{x-b} = \frac{a}{b}, \qquad x = \frac{2ab}{a+b}.$$

Weitere Lösungen zu 6 und 7 siehe § 15, 3 und § 16, 3.

8. Es ergeben sich alle möglichen Teilverhältnisse und Teilpunkte, wenn man (Fig. 22) bei unverändertem zweiten Glied $q = BY_1$ den Wert von $p = AX$ von Null ab unbeschränkt wachsen läßt (in

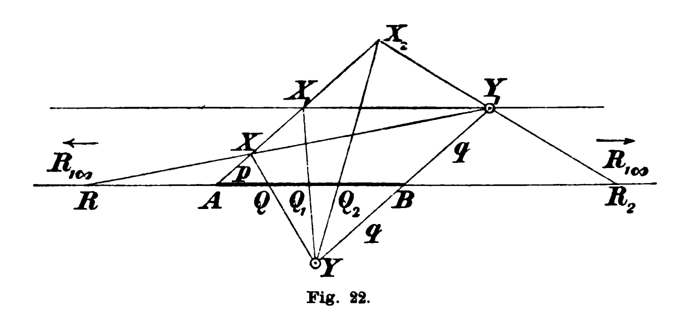


Fig. 22.

der Richtung AXX_1X_2); dann gehen Q und R von A aus nach gegengesetzten Richtungen, bis [für $p = q = AX_1$ oder $p : q = 1$] der Punkt Q_1 die Mitte der Strecke AB erreicht, während R auf $Y_1X_1 \parallel AB$ in unendliche Entfernung hinausgerückt ist. Dies drückt man durch den Satz aus:

Dem Mittelpunkt einer Strecke ist der unendlich ferne Punkt der Geraden harmonisch zugeordnet.

Wird $p = AX_2 > q$, so fällt R auf die andere Seite, und Q_2 und R_2 nähern sich dem B um so mehr, je größer p oder $p : q$ wird.

Zweites Kapitel.

Produkte von Strecken im Zweistrahl mit gewendet parallelen Geraden und mit dem Kreis.

§ 8. Das rechtwinkelige Dreieck mit der Hypotenusenhöhe.

1. Wenn (Fig. 23) im Zweistrahl S mit den Parallelen AB und XY das $\triangle SXY$ um die Halbierende von $\measuredangle S$ umgewendet wird, so kommt es in die Lage SA_1B_1, wobei nun $\measuredangle A = X = A_1$ ist. Umgekehrt kann unter der Voraussetzung, daß die Winkel A und A_1 gegenwendig gleich sind, das $\triangle SA_1B_1$ durch Umwendung nach SXY

gebracht werden; so daß dann $XY \parallel AB$ und $\triangle SXY \backsim SAB$ ist. Das $\triangle SA_1B_1$ liegt im Zweistrahl S gewendet ähnlich zu $\triangle SAB$,

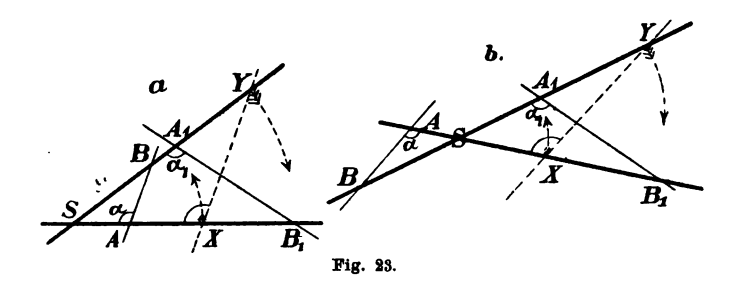


Fig. 23.

und die Gerade A_1B_1 liegt gewendet parallel (antiparallel) zu AB. Daher verhält sich (S. 11, § 3, 1):

$$SA : SB = (SX : SY) = SA_1 : SB_1,$$

oder es ist: $$\mathbf{SA \cdot SB_1 = SB \cdot SA_1.}$$

Statt gleicher Verhältnisse ergeben sich hier *gleiche Produkte* (der Maßzahlen) *der Strahlstrecken im Zweistrahl mit gewendet Parallelen.*

2. In einem rechtwinkeligen Dreieck ABC (Fig. 24) werde die Höhe CC_1 gezogen; dann ist $\sphericalangle ACB = AC_1C$; daher liegt $\triangle ACC_1$ gewendet ähnlich zu $\triangle ABC$, und es ist

$$AC_1 : AC = AC : AB$$

oder $$\overline{AC}^2 = AB \cdot AC_1.$$

Im rechtwinkeligen Dreieck ist eine Kathete das geometrische Mittel zwischen der Hypotenuse und ihrem Abschnitt unter der Kathete, *oder:* ***das Quadrat der Kathete ist gleich dem Produkt der Hypotenuse und ihrem Abschnitt unter der Kathete.*** (Vgl. I. Teil § 44, 6).

3. Ferner ist (Fig. 24)

im Zweistrahl A: $AC_1 : C_1C = AC : CB$;

im Zweistrahl B: $AC : CB = C_1C : C_1B$,

also $AC_1 : C_1C = C_1C : C_1B$,

oder: $\overline{CC_1}^2 = AC_1 \cdot C_1B.$

Fig. 24.

Im rechtwinkeligen Dreieck ist die Höhe das geometrische Mittel zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse, oder: ***das Quadrat der Höhe ist gleich dem Produkt der Abschnitte der Hypotenuse.*** (Vgl. I. Teil, § 44, 8).

Es folgt dies auch daraus, daß $\triangle AC_1C \backsim CC_1B$ ist, da beide Dreiecke rechtwinkelig und $\sphericalangle ACC_1 = R - BCC_1 = \sphericalangle B$.

4. Aus 2 folgt noch weiter:

$$\overline{AC}^2 = AC_1 \cdot AB$$

und

$$\overline{BC}^2 = C_1B \cdot AB,$$

somit

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = (AC_1 + C_1B) \cdot AB, \quad \text{d. i.} = \overline{AB}^2.$$

Im rechtwinkeligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten. (Vgl. I. Teil § 44, 7).

Anwendung findet dieser Satz, um aus zwei Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks die dritte zu berechnen, z. B.

$$AC = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{(AB + BC) \cdot (AB - BC)}.$$

Die weitere Behandlung der sich hieraus ergebenden Maßbeziehungen folgt in der zweiten Abteilung.

§ 9. Der Strahlenbüschel mit dem Kreis. Potenz und Potenzgerade.

1. Da in einem Kreis jeder Umfangswinkel über einem Durchmesser ein Rechter ist, so lassen sich die in § 8, 2 und 3 angegebenen Sätze sofort auch auf den Kreis übertragen. In diesem (Fig. 25) ist:

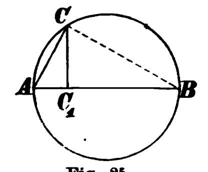


Fig. 25.

a)
$$AC_1 : AC = AC : AB$$

oder

$$\overline{AC}^2 = AB \cdot AC_1, \quad \text{d. h.:}$$

Im Zweistrahl aus einer Sehne und einem Durchmesser im Kreis ist das Quadrat der Sehne gleich dem Produkt des Durchmessers und seines Abschnittes unter der Sehne.

b) Ferner ist:

$$AC_1 : C_1C = C_1C : C_1B$$

oder

$$\overline{CC_1}^2 = AC_1 \cdot C_1B, \quad \text{d. h.:}$$

Das Quadrat jeder zu einem Durchmesser senkrechten Halbsehne im Kreis ist gleich dem Produkt der Abschnitte des Durchmessers.

2. Im Zweistrahl $S(B, B_1)$ mit einem Kreis ist $\sphericalangle SBA_1 = SB_1A$ (I. Teil § 29, 4b), somit $\triangle SAB_1$ gewendet ähnlich gelegen zu SA_1B; daher gilt nun

$$SA : SA_1 = SB_1 : SB$$

oder

$$SA \cdot SB = SA_1 \cdot SB_1.$$

Für jeden Strahl von einem Punkt nach einem Kreis ist das Produkt der Strahlstrecken das gleiche.

Entsprechend den Richtungen der Strahlstrecken ist das Produkt bei einem äußeren Punkt positiv, bei einem inneren negativ.

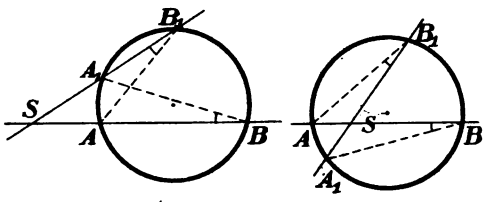


Fig. 26.

3. Umgekehrt: wenn bei einem Zweistrahl S auf dem einen Strahl zwei Punkte A, B und auf dem andern ebenfalls zwei, A_1, B_1, so liegen, daß $SA \cdot SB = SA_1 \cdot SB_1$ (zugleich mit Übereinstimmung der den Richtungen entsprechenden Vorzeichen), so muß der durch AA_1B gehende Kreis eine Strahlstrecke auf SA_1 begrenzen, die dem letzten Faktor dieser Gleichung entspricht, d. h. der Kreis muß auch durch B_1 gehen. Also:

Wenn in einem Zweistrahl das Produkt der Strahlstrecken des einen Strahles gleich dem des andern ist, so liegen die vier Endpunkte der Strecken auf einem Kreis.

4. Dreht man den Strahl um S so, daß die Schnittpunkte A_1 und B_1 zusammenrücken, so ergibt sich schließlich eine Berührende, wobei

$$\sphericalangle\, SA_1A = SBA_1$$

ist (I. Teil § 29, 4a). Daher ist:

$$\overline{SA_1}^2 = SA \cdot SB.$$

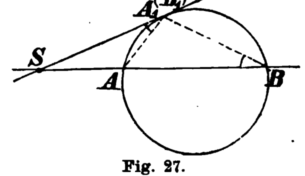


Fig. 27.

Das Produkt der Strahlstrecken eines Strahles von einem Punkt nach einem Kreis ist gleich dem Quadrat der Strecke des berührenden Strahles.

5. Ist umgekehrt auf einem Zweistrahl $\overline{SA_1}^2 = SA \cdot SB$ gegeben, so wird ein Kreis um ABA_1 auf SA_1 einen zweiten Abschnitt SB_1 ergeben, für den $SA_1 \cdot SB_1 = SA \cdot SB$ ist, woraus folgt $SB_1 = SA_1$.

Wenn bei einem Zweistrahl das Quadrat einer Strahlstrecke des einen Strahles gleich dem Produkt zweier gleichgerichteten Strahlstrecken des andern Strahles ist, so berührt der erste Strahl den durch die drei Grenzpunkte gelegten Kreis.

6. Liegt ein Punkt im Abstand a von der Mitte eines Kreises, dessen Halbmesser r ist, so sind von den beiden Strahlstrecken durch den Mittelpunkt der eine $(a + r)$ und der andere $(a - r)$ oder $(r - a)$, je nachdem der Punkt außen oder innen liegt.

Für jeden Strahl von einem Punkt nach einem Kreis hat das Produkt der beiden Strahlstrecken daher auch den Wert

$$(a + r) \cdot (a - r) = a^2 - r^2;$$

dieser Wert heißt die ***Potenz des Punktes*** in Bezug auf den Kreis. Dabei entspricht den vom Strahlpunkt ausgehenden Richtungen der Strahlstrecken das Vorzeichen der Potenz: liegt der Punkt außen, so sind die Strecken gleichgerichtet und die Potenz $(a^2 - r^2)$ ist positiv, und zwar gleich dem Quadrat der Berührenden vom Punkt an den Kreis; liegt der Punkt innen, so sind die Strecken gegengerichtet, und die Potenz ist negativ $= (a^2 - r^2) = - h^2$, d. i. gleich dem negativen Quadrat der Halbsehne des Punktes.

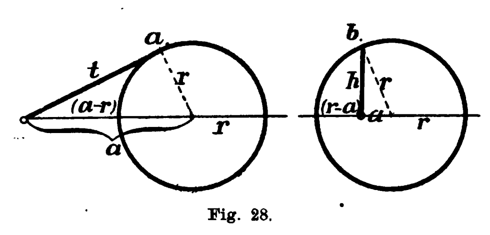


Fig. 28.

7. In Bezug auf zwei Kreise M und M_1 mit den Halbmessern r und r_1 habe ein Punkt Z die gleiche Potenz. Dann ist:

$$\overline{ZM}^2 - r^2 = \overline{ZM_1}^2 - r_1^2;$$

ist nun ZT die Senkrechte von Z auf die Mittellinie beider Kreise, so ist:

$$\overline{ZM}^2 = \overline{ZT}^2 + \overline{TM}^2$$
$$\overline{ZM_1}^2 = \overline{ZT}^2 + \overline{TM_1}^2,$$

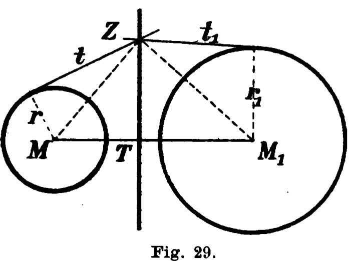


Fig. 29.

also wird
$$\overline{TM}^2 - r^2 = \overline{TM_1}^2 - r_1^2,$$

d. h. T hat ebenfalls die gleiche Potenz für beide Kreise. Dies kann aber nur für einen einzigen Punkt der Mittellinie gelten, da der Punkt eindeutig bestimmt ist durch

$$M_1T + TM = M_1M \qquad \text{und} \qquad \overline{TM_1}^2 - \overline{TM}^2 = r_1^2 - r^2.$$

Irgend ein Punkt gleicher Potenzen für beide Kreise muß also auf der in T errichteten Senkrechten liegen, d. h.:

a) *Der geometrische Ort aller Punkte, die für zwei Kreise (nach Wert und Zeichen) übereinstimmende Potenzen haben, ist eine Gerade, die sog.* ***Potenzgerade der zwei Kreise;*** *sie ist die Senkrechte in demjenigen Punkt der Mittellinie beider Kreise, der für diese die gleiche Potenz hat.*

Hieraus ergibt sich:

b) *Die Potenzgerade zweier Kreise halbiert deren gemeinsame Berührende; wenn die Kreise einander schneiden, geht sie durch die beiden Schnittpunkte; wenn die Kreise einander berühren, ist sie die gemeinsame Berührende.*

8. Über die Potenzgeraden dreier Kreise siehe § 23, 8.

§ 10. Zeichnung des geometrischen Mittels, des goldenen Schnittes und der Berührungskreise für Gerade und Punkte.

1. Aufgabe: *Zu zwei gegebenen Strecken a und b soll deren geometrisches Mittel gezeichnet werden,* so daß $a : x = x : b$ oder $x^2 = ab$.

a) Gemäß § 9, 1a (S. 24) beschreibt man um die größere von beiden Strecken als Durchmesser einen Halbkreis, trägt von einem Grenzpunkt des Durchmessers aus auf diesem die kleinere Strecke ab und errichtet im Endpunkt dieses Abschnittes zu ihm die Senkrechte. Die Sehne, unter der dieser Abschnitt liegt, ist dann das gesuchte geometrische Mittel.

b) Nach § 9, 1b trägt man die beiden Strecken aneinander auf einer Geraden ab, beschreibt um ihre Summe als Durchmesser einen Kreis und zieht in dem gemeinsamen Grenzpunkt beider Strecken die senkrechte Halbsehne; diese ist das gesuchte geometrische Mittel.

c) Nach § 9, 4 (S. 25) zeichnet man zum Unterschied der beiden Strecken als Sehne (oder Durchmesser) einen Kreis und zieht an diesen vom nicht gemeinsamen Grenzpunkt der größeren Strecke aus die Berührende; diese ist das gesuchte geometrische Mittel.

2. a) Wird eine Strecke $AB = a$ in dem einen Grenzpunkt B von einem Kreis berührt, dessen Halbmesser $= \frac{a}{2}$ ist, so sind die Strahlstrecken der Geraden von A durch den Mittelpunkt $= x$ und $(a + x)$. Dann ist $a^2 = (a + x) \cdot x$ (§ 9, 4), oder

$$(a + x) : a = a : x,$$

$$AZ : YZ = YZ : AY.$$

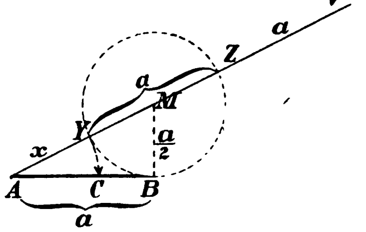


Fig. 30.

Eine Strecke AZ, die so geteilt ist, daß der eine (größere) Abschnitt YZ das geometrische Mittel zwischen der ganzen Strecke und dem andern Abschnitt AY ist, heißt nach dem goldenen Schnitt geteilt.

Ist der größere Abschnitt a gegeben, so ergibt diese Zeichnung die ganze Strecke AZ.

b) Aufgabe: *Eine Strecke a soll nach dem goldenen Schnitt geteilt werden,* also so geteilt werden, daß $a : x = x : (a - x)$.

Man zieht (Fig. 30) mit dem Halbmesser $\frac{a}{2}$ einen Kreis, der die Strecke a in einem Grenzpunkt berührt, zieht vom andern Grenzpunkt aus die Gerade nach der Mitte des Kreises und überträgt die außerhalb des Kreises entstehende Strahlstrecke x auf a.

Denn nach § 9, 4 (S. 25) ist

$$a^2 = (a + x) \cdot x, \qquad a^2 - ax = x^2, \qquad a \cdot (a - x) = x^2,$$

also $$a : x \quad = \quad x : (a - x)$$

oder $$AB : AC = AC : CB.$$

Aus dem Dreieck ABM ergibt sich:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad \text{d. i.} \quad = \frac{5a^2}{4}, \quad x = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) \cdot$$

c) Aus

$$ax + x^2 = a^2 \quad \text{folgt:} \quad a^2 + 2ax + x^2 = 2a^2 + ax$$

oder $$(a + x)^2 = a \cdot (2a + x),$$

also $$(2a + x) : (a + x) = (a + x) : a.$$

oder $$AV : AZ \quad = \quad AZ : ZV.$$

Hiernach kann man auch zu dem gegebenen kleineren Abschnitt $ZV = a$ den größeren $AZ = (a + x)$ und die ganze Strecke $AV = (2a + x)$ finden.

3. Aufgabe. *Man soll Kreise zeichnen, welche*

a) *durch zwei gegebene Punkte A und B gehen und eine gegebene Gerade c berühren;*

b) *durch einen gegebenen Punkt C gehen und zwei gegebene Gerade a und b berühren.*

Anleitung: a) Wenn die Verbindungsgerade AB (Fig. 31) die Gerade c in S schneidet, so ist der Berührungspunkt X auf c so gelegen, daß $\overline{SX}^2 = SA \cdot SB$ ist, was nach 1a zu zeichnen ist.

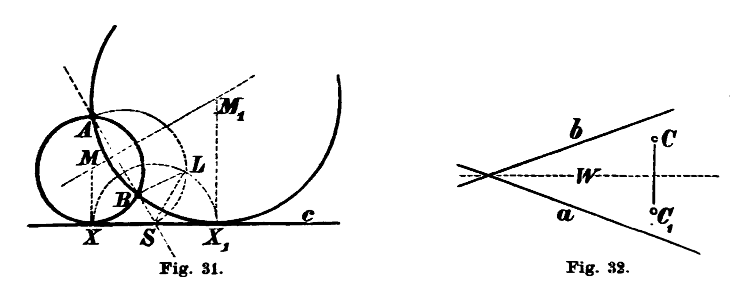


Fig. 31. Fig. 32.

c) Da die zu ab (Fig. 32) gehörende Winkelhalbierende W Mittellinie für den fraglichen Kreis ist, so geht derselbe auch durch $C_1 \wedge C$; hiernach kommt die Aufgabe auf a) zurück.

Weitere Aufgaben, nämlich auch „zu Kreisen berührende Kreise zu zeichnen", sollen erst nach der Betrachtung des Kreises als Bild des Kreises (§ 12, 3 und 5 u. 24, 1—7) behandelt werden.

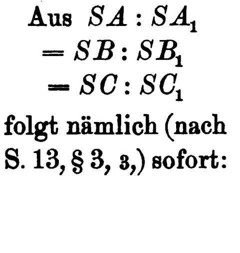
Drittes Kapitel.

Ähnliche Abbildung.

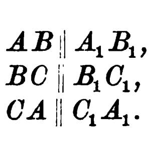
§ 11. Ähnliche Abbildung geradliniger Figuren.

1. *Wenn die Ecken zweier Dreiecke paarweise auf drei Strahlen eines Punktes liegen und Strahlstrecken von gleichem Verhältnis begrenzen, so sind die Seiten der Dreiecke paarweise parallel.*

1′. *Wenn die Seiten zweier Dreiseite paarweise parallel sind, so liegen die Ecken der Dreiecke paarweise auf drei Strahlen eines Punktes.*



Aus $SA : SA_1 = SB : SB_1 = SC : SC_1$ folgt nämlich (nach S. 13, § 3, 3,) sofort:



$AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $CA \parallel C_1A_1$.

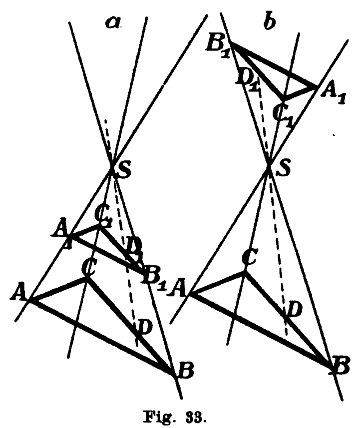


Fig. 33.

Die Strecke AA_1 wird nämlich durch BB_1 im Verhältnis $AB : A_1B_1$ geteilt (S. 13, § 3, 2,) und durch CC_1 im Verhältnis $AC : A_1C_1$. Beide Verhältnisse stimmen überein; denn es ist $\triangle ABC \backsim A_1B_1C_1$, weil die parallelen Seiten gleiche Winkel bilden (S. 14, § 4, 1); somit fallen die Teilpunkte zusammen (S. 15, § 5, 1), d. h. AA_1 und BB_1 und CC_1 gehen durch einen Punkt.

2. Man zeichnet zu einer Figur in einer Ebene ein ähnliches und ähnlich liegendes Bild oder ein perspektiv liegendes ähnliches (p. ä.) Bild, indem man 1) von einem Punkt S, dem Strahlpunkt oder Ähnlichkeitspunkt, Strahlen durch die Punkte der Figur zieht, dann 2) einen Punkt A der Figur mit ihren übrigen Punkten $B, C, \ldots$ durch Strecken $AB, AC \ldots$ (als Hilfslinien) verbindet und 3) auf dem Strahl SA einen beliebigen Punkt A_1 als Bildpunkt zu A annimmt und durch ihn Parallele zu diesen Strecken zieht, $A_1B_1 \parallel AB$, $A_1C_1 \parallel AC \ldots$ Der Schnittpunkt einer solchen Parallelen A_1B_1 mit dem Strahl des betreffenden Punktes B ist das Bild dieses Punktes, B_1 der Bildpunkt zu B; ebenso ist C_1 der Bildpunkt zu C. Die Bilder von Linien werden durch die Bilder einer genügenden Anzahl ihrer Punkte bestimmt*.

---

*) Die Ausführung erfordert nur das Anlegen von Winkelscheit und Lineal und Bestimmen der Punkte auf den Strahlen, ohne die Hilfslinien auszuziehen.

Zwei Figuren heißen einander **ähnlich und ähnlich liegend** *(oder* **perspektiv ähnliche Figuren)**, *wenn je 2 entsprechende Punkte beider Figuren auf demselben Strahl eines Büschels liegen, und wenn zugleich die Verbindungsgeraden eines Punktes der Figur mit jedem andern Punkt der Figur jeweils parallel sind mit den Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte.*

3. Aus der Zeichnung folgt, daß $SA : SA_1 = SB : SB_1$,
$SA : SA_1 = SC : SC_1, \ldots$.
Man kann deshalb auch die gegebene Erklärung der ähnlichen Abbildung durch folgende ersetzen:

Ähnliche und ähnlich liegende Figuren sind solche, deren entsprechende Punkte auf den Strahlen eines Punktes liegen und Strahlstrecken von gleichem Verhältnis begrenzen.

Diese Erklärung ist im Ausdruck, aber nicht gerade in der Ausführung kürzer als die in 2 gegebene, die keine Messung erfordert. Nach der in 2 gegebenen Bestimmung erscheint die ähnliche Abbildung als ein besonderer Fall der perspektiven Abbildung (§ 21, 2).

4. Aus 3 und 1 folgt nun, daß auch $B_1C_1 \parallel BC$, d. h.:

a) *Zur Verbindungsgeraden irgend zweier Punkte ist die der ähnlich liegenden Bildpunkte parallel.*

Für jeden weiteren Punkt D der Geraden BC fällt die Verbindungsgerade BD auf die Gerade BC, somit die Verbindungsgerade des Bildpunktes B_1D_1 auf die Parallele zu BC durch B_1, d. h. auf B_1C_1; die Bilder der Punkte der Geraden BC liegen auf B_1C_1.

b) *Die Bilder der Punkte einer Geraden liegen auf einer Geraden.*

Hieraus folgt für die Gerade selbst:

c) *Das Bild einer Geraden ist eine Gerade, und zwar ist diese*

α) die Verbindungsgerade der Bilder zweier Punkte der Geraden, oder β) bei ähnlicher Lage die Parallele durch das Bild eines Punktes der Geraden.

5. Gehört ein Punkt C zwei Geraden AC und BC an, so gehört sein Bild C_1 den Bildern A_1C_1 und B_1C_1 der beiden Geraden an, d. h.:

Das Bild des Schnittpunktes zweier Geraden ist der Schnittpunkt der Bilder der Geraden.

Die beiden Schnittpunkte C und C_1 liegen also auf einem Strahl des Ä.-Punktes zu AA_1 und BB_1, womit wieder der Satz 1′ bewiesen ist.

6. Da alle entsprechenden Geraden parallel sind, so kann man die Zeichnung der Bilder nicht nur wie in 2 durch Verbindungsgeraden von einem bestimmten Punkt A und seinem Bild A_1 aus erhalten, sondern die Zeichnung ebensowohl auch von einem so erhaltenen Punktpaar BB_1 aus durchführen, oder von Punktpaar zu Punktpaar weiterführen. Geht man von zwei Punktpaaren AA_1 und BB_1 aus und

zieht nach den andern Punkten wie C die Parallelenpaare $A_1C_1 \parallel AC$, $B_1C_1 \parallel BC$, so erhält man (nach 5) den Bildpunkt C_1, ohne den Strahlpunkt zu benutzen.

7. Wird der Strahlpunkt S selbst als ein Punkt der Vorlage aufgefaßt, so ist er sein eigenes Bild; ebenso entsprechen einander die Strahlstrecken eines Strahles SA und SA_1. So ist das Dreieck SA_1B_1 p. ä. SAB, was die in § 4 benützte Bezeichnung rechtfertigt.

Wenn hierbei die Strahlstrecken nach einem Punkt A und seinem Bild A_1 in gleicher Richtung vom Strahlpunkt S aus liegen (Fig. 33a), so heißt dieser ein äußerer Ä.-Punkt, und die entsprechenden Richtungen beider Figuren AB und A_1B_1 sind gleichgerichtet parallel. Liegen die Strahlstrecken SA und SA_1 gegengerichtet (Fig. 33b), so ist der Ä.-Punkt ein innerer, und die entsprechenden Richtungen sind gegengerichtet parallel.

8. Wenn auf die in 2 angegebene Weise zu einer Figur ABC . . (Fig. 34a) eine ähnlich liegende $A_1B_1C_1$ . . oder $A_2B_2C_2$ . . . gezeichnet wird, und wenn dann die Figuren aus dieser Lage heraus beliebig in die Ebene verlegt werden (Fig. 34b), so heißen diese Figuren auch jetzt noch einander ähnlich ($\backsim$); die Größen ihrer Strecken und Winkel bleiben dabei unverändert.

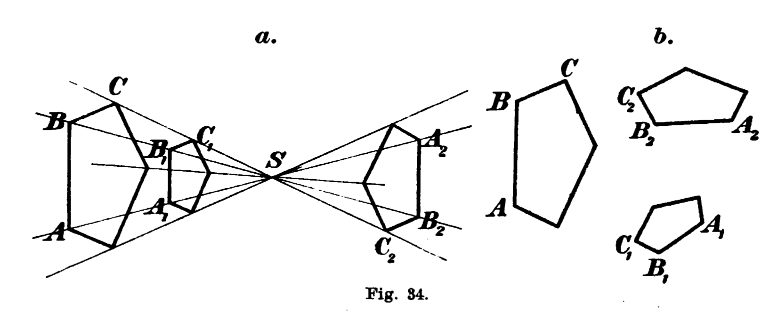


Fig. 34.

Ähnliche Figuren sind also solche, die in ähnliche Lage gegenseitiger Bestrahlung von einem Punkt gebracht werden können (2).

Da hierbei alle entsprechenden Geraden parallel werden, so müssen die entsprechenden Winkel in beiden übereinstimmen. Aus der Aneinanderreihung der parallelen Strecken in Zweistrahlen mit je einem gemeinsamen Strahlstreckenpaar folgt ferner noch die Gleichheit der Verhältnisse der entsprechenden Strecken (vgl. S. 16, § 5, 2). Hierdurch ist bewiesen:

In ähnlichen Figuren sind die entsprechenden Winkel einander gleich, und die entsprechenden Seitenpaare haben das gleiche Verhältnis.

Hieraus ergibt sich die Möglichkeit, *zu der Vorlage das Bild zu zeichnen oder zu ergänzen, ohne daß beide in ähnlicher Lage sind.*

Das Verhältnis einer Strecke im Bild zu der entsprechenden Strecke der Vorlage heißt der **Maßstab des Bildes.**

9. Die Umkehrung von 8 lautet:

Wenn in zwei Geradenzügen gleiche Winkel in übereinstimmender Ordnung auf einander folgen und ebenso verhältnisgleiche Strecken auf den Schenkeln der entsprechenden Winkel, so sind die Figuren ähnlich; — sie liegen auch ähnlich, wenn eine Gerade ihrem Bild parallel ist und ein anschließendes Winkelpaar gleichwendig liegt.

Denn wenn $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1$ und $\sphericalangle B = B_1$, so ist $\triangle ABC \backsim A_1B_1C_1$ (nach § 4, 2), und die Winkel beider Dreiecke stimmen überein. Hieraus ergibt sich aber, wenn noch $AB \parallel A_1B_1$ und $\sphericalangle ABC = A_1B_1C_1$ gleichwendig, daß auch $BC \parallel B_1C_1$, $AC \parallel A_1C_1$; also liegen beide Dreiecke gegenseitig bestrahlt (nach 1′) und ähnlich (gemäß 2). In gleicher Weise ergibt sich für die anschließenden Seiten BCD p. ä. $B_1C_1D_1$, . . . usw.

10. Daraus, daß die Übereinstimmung in den Winkeln und in den Seitenverhältnissen zur Ähnlichkeit der Figuren genügt, folgt:

a) *Wenn zwei Figuren einer dritten ähnlich sind, so sind sie auch einander ähnlich.*

Denn erstens stimmen sie in den gleichliegenden Winkeln überein, und zweitens: wenn das Streckenverhältnis der ersten Figur zur dritten $= a_1 : a_3$ und wenn das der zweiten zur dritten $= a_2 : a_3$ ist, so ist das Verhältnis sämtlicher entsprechenden Strecken der ersten und zweiten Figur $= a_1 : a_2$.

Ist $a_2 = a_1$, so stimmen die beiden ersteren Figuren in Winkeln und Strecken vollkommen überein, woraus folgt:

b) *Das ähnliche Bild einer Figur ist (nach Form und Größe) durch das Verhältnis zweier entsprechenden Strecken eindeutig bestimmt.*

11. In Bezug auf die Lage **zweier zu einer dritten ähnlich liegenden Figuren** ist noch auszusagen:

Wenn bei zwei ähnlichen Figuren jede einzeln von einer dritten bestrahlt ist, so sind sie es auch von einander. Dabei liegen die drei Ä.-Punkte auf einer Geraden, der Ähnlichkeitsachse, und zwar entweder drei äußere Ä.-Punkte, oder zwei innere und ein äußerer.

Wenn nämlich A_1B_1 p. ä. A_3B_3 zu S_2 als Ä.-Punkt,
und wenn A_2B_2 p. ä. A_3B_3 zu S_1 als Ä.-Punkt,
so muß auch $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ sein; also ist A_1B_1 p. ä. A_2B_2 zu S_3 als Ä.-Punkt. Nun ziehe man die Gerade S_1S_2 und lasse sie von A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 in X_1, X_2, X_3 schneiden. Dann wird A_1B_1 durch X_1

im selben Verhältnis geteilt wie A_3B_3 durch X_3, und ebenso auch A_2B_2 durch X_2. Hieraus folgt die Übereinstimmung der Teilverhält-

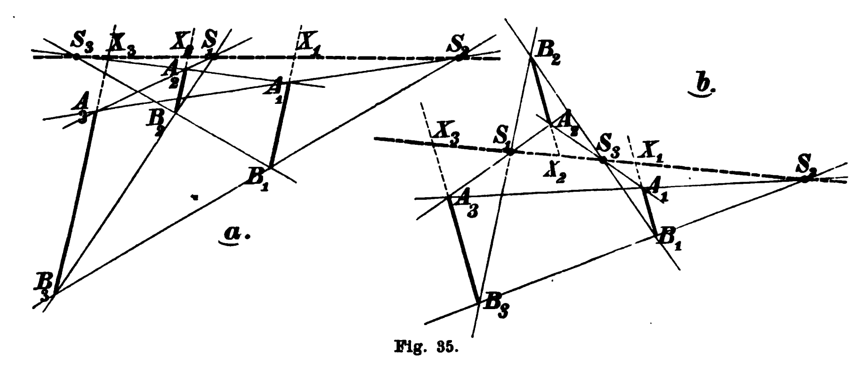


Fig. 35.

nisse von $A_1B_1X_1$ und $A_2B_2X_2$, und es folgt weiter, daß durch den Schnittpunkt S_3 von A_1A_2 und B_1B_2 auch X_1X_2 oder S_1S_2 gehen muß (S. 16, § 5, 3), d. h. S_1, S_2, S_3 liegen auf einer Geraden.

Sind alle drei Strecken A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 gleichgerichtet (Fig. 35, a), so liegen die äußeren Ä.-Punkte auf einer Geraden; ist eine Strecke A_2B_2 gegengerichtet parallel zu den beiden andern (Fig. 35, b), so gelten zwischen ihr und den andern die inneren Ä.-Punkte und für diese anderen der äußere.

§ 12. Der Kreis als ähnliches Bild des Kreises. Das Sechseck im Kreis.

1. Man ziehe in zwei Kreisen M, M_1 zwei parallele Halbmesser $MA \parallel M_1A_1$. Schneidet dann die Gerade AA_1 die Mittellinie

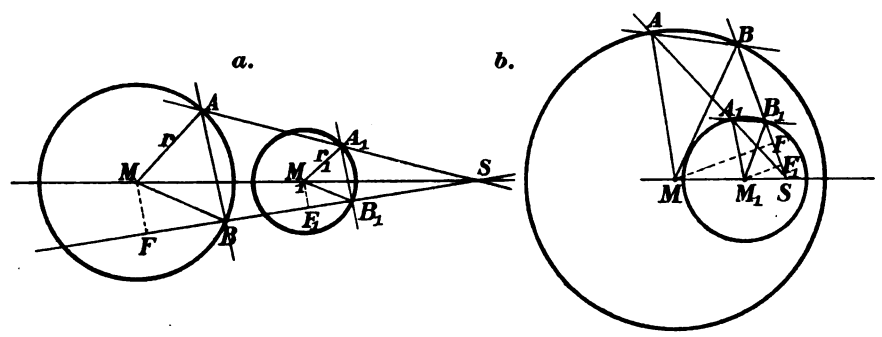


Fig. 36 a und b.

MM_1 in S, so teilt S den Abstand der Mittelpunkte außen (Fig. 36, a und b) oder innen (Fig. 36, c und d), und zwar im Verhältnis der Halbmesser, also $MS : M_1S = r : r_1$. Denselben Teilpunkt gibt die Verbindungsgerade BB_1 der Endpunkte jedes andern Paares paral-

leler Halbmesser $MB \parallel M_1 B_1$; somit liegen die Punkte beider Kreise paarweise ähnlich zu S als Ä.-Punkt. Sind die Halbmesser gleichgerichtet, so ergibt sich ein **äußerer** Strahlpunkt, bei entgegengesetzter Richtung ein **innerer**.

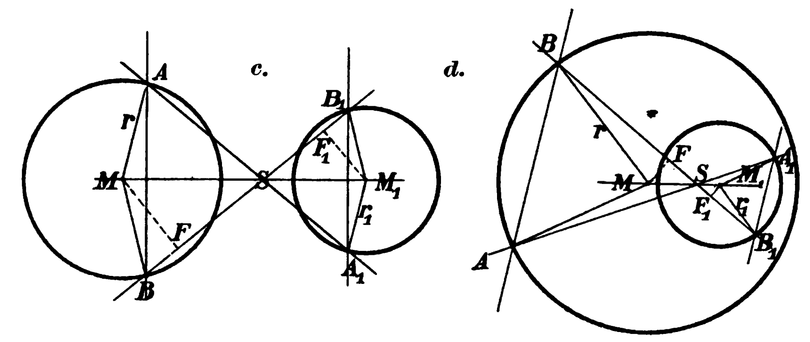


Fig. 36c und d.

a) *Zwei Kreise liegen ähnlich sowohl zu einem äußeren als auch zu einem inneren Ä.-Punkt; jeder von beiden teilt den Abstand der Mittelpunkte im Verhältnis der Halbmesser.*

b) *Die Endpunkte gleichgerichtet paralleler Halbmesser liegen auf einem äußeren Ä.-Strahl, die Endpunkte gegengerichteter auf einem inneren.*

Umgekehrt:

c) Äußere Ä.-Strahlen zweier Kreise treffen diese in den Endpunkten gleichgerichtet paralleler Halbmesser, innere treffen sie in den Endpunkten gegengerichtet paralleler Halbmesser. Die Sehnen entsprechender Punktpaare AB und $A_1 B_1$ sind parallel, ebenso die in entsprechenden Punkten Berührenden (S. 30, § 11, 4c).

2. Die Halbmesser zweier Kreise nach den Berührungspunkten einer gemeinsamen Berührenden sind parallel, da sie zu dieser senkrecht sind; also (1, b) folgt:

a) *Auch die gemeinsamen Berührenden zweier Kreise sind für diese Ä.-Strahlen, und zwar sind die äußeren Berührenden äußere, die inneren innere Ä.-Strahlen.*

Berühren die Kreise einander, so teilt ihr Berührungspunkt den Mittelpunktabstand im Verhältnis der Halbmesser, also (1, a) folgt:

b) *In zwei einander berührenden Kreisen ist der Berührungspunkt Ä.-Punkt, und zwar äußerer bei einschließender Berührung, innerer bei ausschließender.*

3. Aufgabe: *Es ist ein Kreis zu zeichnen, der einen gegebenen Kreis M in einem gegebenen Punkt S berührt und durch einen zweiten*

Punkt B_1 geht. Man zieht SB_1 bis zum Schnitt B mit dem Kreis M; dann ist der fragliche Halbmesser durch B_1 parallel zu MB, da S ein Ä.-Punkt ist.

4. Von drei Kreisen einer Ebene liegen zwei ähnlich zu dem dritten. Daher folgt aus S. 32, § 11, 11 (indem in Figur 35 A_1B_1, A_2B_2 und A_3B_3 drei parallele Halbmesser darstellen mögen):

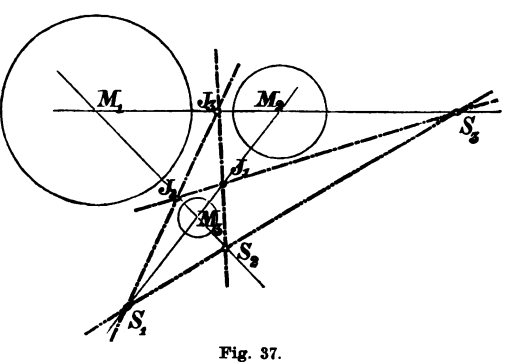


Fig. 37.

Bei drei Kreisen liegen die drei äußeren Ä.-Punkte auf einer Geraden, der äußeren Ä.-Achse; ebenso liegt auch je ein äußerer Ä.-Punkt mit den zwei nicht zugehörigen inneren auf einer Geraden, so daß es also auch drei innere Ä.-Achsen gibt (Satz von Monge). (Vgl. auch S. 41, § 14, 3).

5. Wenn zwei Kreise von einem dritten berührt werden, so folgt aus 4 in Verbindung mit 2b:

Bei gleichartiger Berührung zweier Kreise durch einen dritten liegen die Berührungspunkte auf einem äußeren Ä.-Strahl der beiden ersteren Kreise, bei ungleichartiger Berührung auf einem inneren, jedoch nicht entsprechend.

6. Aufgabe: *Es sollen zwei Kreise M und M_1 von einem dritten und zwar ersterer in einem Punkt A berührt werden.* Man zieht MA und gleich- oder gegengerichtet den Halbmesser $M_1A_1 \parallel MA$; dann schneidet die Gerade AA_1 den Kreis M_1 in dessen Berührungspunkt (vgl. I. Teil § 34, 5b).

7. Man zeichne (Fig. 38) durch 2 beliebige Punkte A_1, C_1 eines

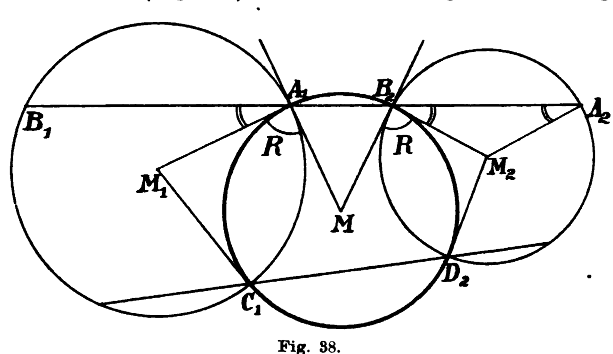


Fig. 38.

Kreises M einen Kreis, dessen Mittelpunkt M_1 im Schnittpunkt der Berührenden

von A_1 und C_1 liegt, und ebenso einen zweiten Kreis durch 2 weitere Punkte B_2, D_2 mit dem Mittelpunkt M_2. Dann ist $A_1 B_2$ ein Ä.-Strahl der Kreise M_1 und M_2. Denn mit dieser Geraden bilden MA_1 und MB_2 gleiche Winkel, daher auch $M_1 A_1$ und $M_2 B_2$, da die Zwischenwinkel $= R$ sind, $\sphericalangle M_1 A_1 B_1 = M_2 B_2 A_2 = A_2$, somit $M_2 A_2 \parallel M_1 A_1$, und A_1, A_2 sind zwei ähnlich liegende Punkte. Ebenso ist $C_1 D_2$ ein Ä.-Strahl. Also schneiden einander $A_1 B_2$ und $C_1 D_2$ in dem (äußeren) Ä.-Punkt der Kreise M_1 und M_2 ($A_1 D_2$ und $C_1 B_2$ im inneren).

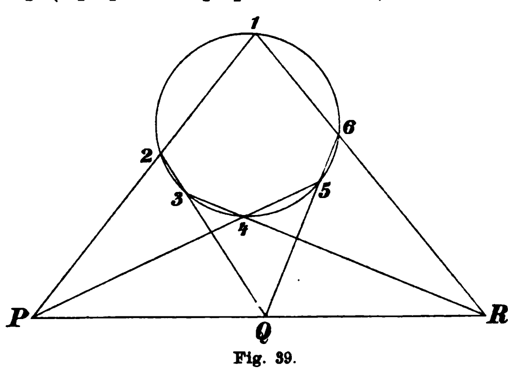


Fig. 39.

Nimmt man nun 6 Punkte auf einem Kreis an (Fig. 39), so kann man durch je 2 Punkte: 1 und 4, 2 und 5, 3 und 6 einen solchen Kreis zeichnen, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Berührenden in beiden Punkten ist. Die beiden ersten Kreise geben die Ä.-Strahlen $\overline{12}$ und $\overline{45}$ mit dem Ä.-Punkt P, der zweite und dritte die Strahlen $\overline{23}$ und $\overline{56}$ mit dem Ä.-Punkt Q, der dritte und erste Kreis die Strahlen $\overline{34}$ und $\overline{61}$ mit dem Ä.-Punkt R. Je nach Lage der sechs Punkte sind dies drei äußere Ä.-Punkte oder ein äußerer und zwei innere. Also:

In jedem Sehnensechseck eines Kreises liegen die drei Schnittpunkte der Gegenseiten in einer Geraden (Satz von Pascal 1640).

Die Reihenfolge der Verbindung der sechs Punkte ist hierbei beliebig.

§ 13. Anwendung der Ähnlichkeit zur Lösung von Aufgaben.

1. Wenn in einer Zeichenaufgabe nur Winkel und Verhältnisse von Strecken gegeben sind und außerdem nur eine Strecke der zu zeichnenden Figur, so kann die Aufgabe dadurch gelöst werden, daß man zunächst diese Strecke außer Betracht läßt und eine Figur zeichnet, die den übrigen Stücken entspricht; hierbei kann irgend eine Strecke der Figur willkürlich gewählt werden. Die fragliche Figur ist dann dieser ähnlich zu zeichnen. Man trägt am einfachsten die gegebene Strecke auf der ihr entsprechenden von einem Grenzpunkt aus an und nimmt diesen als Ä.-Punkt.

Aufgaben: a) Man soll ein Dreieck zeichnen, von dem zwei Winkel gegeben sind und irgend eine Strecke wie eine Höhe, eine Winkelhalbierende, ein Seitenabschnitt, der Umfang usw. — Man zeichnet zuerst ein Dreieck mit den gegebenen Winkeln und einer beliebigen Seite und zieht in diesem Dreieck die der gegebenen

Strecke entsprechende Strecke und trägt auf letzterer die gegebene Strecke an. Dann zeichnet man vom gemeinsamen Grenzpunkt beider Strecken als Ä.-Punkt ein ähnlich liegendes Dreieck, zu dem die gegebene Strecke Strahlstrecke ist.

b) Von einem Dreieck ist das Verhältnis $p:q$ zweier Seiten, der eingeschlossene Winkel γ und die Gegenseite c gegeben. — Man zeichnet das Dreieck aus γ, p, q uud dann das ihm ähnliche mit der bestimmten Seite c.

c) In einen gegebenen Kreis ist ein Dreieck zu beschreiben, das einem gegebenen Dreieck ähnlich ist. (Von einem Dreieck sind der Halbmesser des umbeschriebenen Kreises und die Winkel oder die Seitenverhältnisse gegeben.) — Man beschreibt um das gegebene Dreieck einen Kreis und zieht von dem Ähnlichkeitspunkt beider Kreise die Strahlen durch die Ecken des gegebenen Dreiecks nach dem Umfang des gegebenen Kreises. (Eine andere Lösung gibt die Überlegung, daß der Mittelpunktswinkel das Doppelte des zugehörigen Umfangswinkels ist.)

2. Soll in eine vorliegende Figur eine andere von gegebener Form so eingezeichnet werden, daß zwei bestimmte Punkte der letzteren auf zwei bestimmte Gerade der ersteren fallen und außerdem noch weitere Punkte sich decken, so nimmt man den Schnittpunkt beider Geraden als Ä.-Punkt, zeichnet eine der zweiten Figur ähnliche so ein, daß die betreffenden Punkte auf beide Gerade fallen; hierauf entwirft man von diesem Ä.-Punkt aus ein Bild dieser eingezeichneten Figur, das auch den weiteren Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgabe: a) In ein Dreieck ABC ist ein Quadrat zu zeichnen, so daß dessen Ecken auf den Seiten des Dreiecks liegen. — Man zeichnet zuerst ein Hilfsquadrat $L_1 M_1 J_1 K_1$, so daß L_1 auf AB, K_1 und J_1 auf AC fällt; dann ist A der Ähnlichkeitspunkt für dieses und das gesuchte Quadrat, und der Strahl AM_1 ergibt das Eck M auf BC. — Für dieselbe Lage von $LMJK$ könnte auch B als Ähnlichkeitspunkt gewählt und das Hilfsquadrat über AC nach außen hin gezeichnet werden.

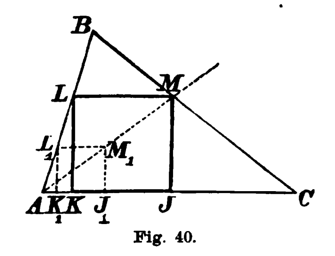


Fig. 40.

b) Es ist ein Kreis zu zeichnen, der durch einen Punkt P geht und zwei gegebene Gerade a und b berührt (vgl. § 10, 3b). Man zeichnet einen Kreis M, der a und b berührt. Ein Strahl vom Schnittpunkt S der beiden Geraden nach dem Punkt P treffe jenen Kreis in P_1 und P_2; jeder dieser Punkte kann dann als Bild von P aufgefaßt werden. Man zieht also die Halbmesser nach diesen Punkten und durch P Parallele zu letzteren; diese Parallelen schneiden die Winkelhalbierende w zu ab in den Mittelpunkten der gesuchten Kreise.

c) Auf dieselbe Lösung führt die Aufgabe: Auf einer Geraden w ist ein Punkt zu bestimmen, der von einem gegebenen Punkt P und einer Geraden a den gleichen Abstand hat.

d) Sollen die Abstände des fraglichen Punktes auf w von P und a in dem gegebenen Verhältnis $p:q$ stehen, so trägt man die Strecke $XM = q$ senkrecht zu a in den Winkel aw und beschreibt von M (auf w) den Kreis mit dem Halbmesser p; auf diesem Kreis bestimmt man das Bild P_1 des Punktes P zum Schnittpunkt von aw als Ä.-Punkt u. s. f.

Auf diese Weise werden auch die Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kegelschnitt bestimmt (gemäß § 25, 12).

3. Manchmal verlangt die Lösung einer Aufgabe, daß man durch einen Punkt S in eine gegebene Figur eine Gerade eintrage, von der die Figur eine Strecke begrenzt, deren Teilverhältnis durch jenen Punkt ein bestimmtes $\pm p:q$ ist. Man entwirft nun von dem Punkt S als Ähnlichkeitspunkt (und zwar als innerem für $+p:q$, als äußerem für $-p:q$) ein Bild zu demjenigen Teil der vorliegenden Figur, auf dem der q entsprechende Grenzpunkt der Strecke liegen soll, indem man das Verhältnis der Ähnlichkeitsstrahlen der neuen Figur zu denen der gegebenen $= p:q$ nimmt; alsdann schneidet diese Hilfsfigur denjenigen Teil der gegebenen Figur, auf dem der Grenzpunkt der p entsprechenden Strecke liegen soll, eben in diesem fraglichen Punkte. — Für den Fall, daß der gegebene Punkt Mittelpunkt der Strecke sein soll, wird die Hilfsfigur gegengesetzt zu der gegebenen gezeichnet.

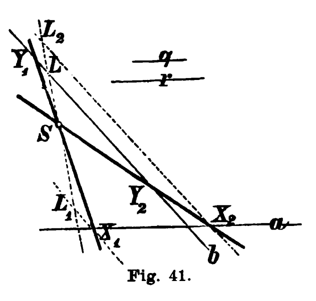


Fig. 41.

Aufgaben: a) Durch einen Punkt S (Fig. 41) ist eine Gerade zu ziehen, die von zwei gegebenen Geraden a und b so begrenzt werden soll, daß die Strecke durch den Punkt S in einem gegebenen Verhältnis $\pm r:q$ geteilt wird. — Man trage $SL = q$ (oder nq) nach b ab und auf dieser Geraden SL_1 (oder SL_2) $= r$ (oder nr) und ziehe durch den Endpunkt L_1 (L_2) dieser Strecke die Parallele zu b, so trifft diese a im fraglichen Punkt X_1 (X_2).

b) Von einem Punkt S (Fig. 42) ist durch einen gegebenen Kreis M eine Gerade so zu ziehen, daß ihre Sehne durch S im Verhältnis $p:q$ geteilt wird. — Man bestimmt auf MS den Punkt M_1 so, daß $M_1S : SM = p:q$ und zeichnet als Bild zu dem Kreis M mit S als Ähnlichkeitspunkt den Kreis M_1; dieser Kreis schneidet den gegebenen in den gesuchten Punkten X und X_1.

c) Man soll ein Dreieck zeichnen, von dem eine Seite a, deren Gegenwinkel α und die Schwerlinie m_2 einer zweiten Seite gegeben ist. — Man beschreibt um $BC = a$ (Fig. 43) einen Kreisbogen M, der den Winkel α

als Umfangswinkel faßt und um B den Kreis mit m_2 als Halbmesser; dann muß noch die Strecke B_1A der fraglichen Seite CA zwischen beiden Kreisen durch C im Verhältnis $-\frac{1}{2}$ geteilt werden. Man zeichnet daher

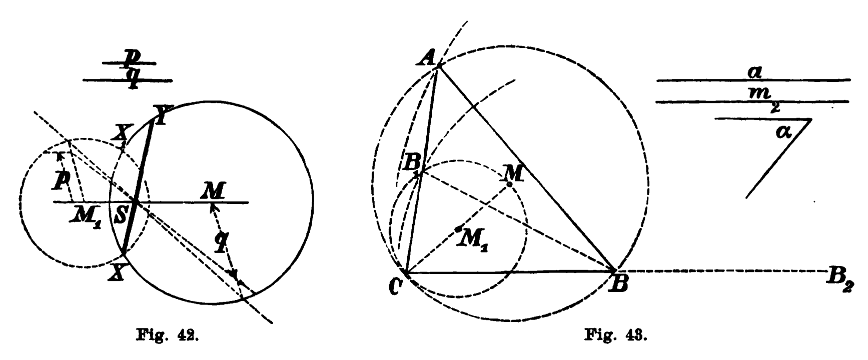


Fig. 42. Fig. 43.

vom äußeren Ä.-Punkt C aus entweder das Bild des Kreises um M, dessen Halbmesser $CM_1 = \frac{1}{2}\,CM$ ist, und erhält so B_1 auf dem Kreis um B; — oder man zeichnet das Bild des Kreises um B, dessen Mittelpunkt B_2 durch $CB_2 = 2\,CB$ erhalten wird und dessen Halbmesser $= 2\,BB_1$ ist, und erhält so A auf dem Kreis um M.

II. Abschnitt.

Zusammengesetzte Verhältnisse bei der Abbildung mit einer Bildachse.

Viertes Kapitel.

Abbildung der Strecke und ihrer harmonischen Punkte. Anwendung auf das Dreiseit, Viereck und Vierseit und das Sechseck im Kreis.

§ 14. Der Zweistrahl mit nicht parallelen Geraden. Das Dreiseit mit den Schnittpunkten einer Geraden und mit den Eckstrahlen eines Punktes. Das Sechseck im Kreis.

1. Wenn von einem Strahlpunkt S die Punkte einer Geraden AB auf eine sie schneidende Gerade A_1B durch Strahlen abgebildet werden, und wenn S außerhalb AA_1 liegt, so werden die Punkte X innerhalb AB auch innerhalb A_1B in X_1 abgebildet (Fig. 44a) und die Punkte außerhalb ebenfalls so (b). Liegt dagegen S innerhalb AA_1 (Fig. 44, c und d), so werden innere Punkte X von AB außerhalb A_1B abgebildet und umgekehrt. Dabei bleibt aber in einer solchen Figur das Verhältnis der

Teilverhältnisse $\frac{AX}{XB} : \frac{A_1 X_1}{X_1 B}$ oder das Doppelverhältnis beider Teilungen unverändert für jede Lage des Punktpaares XX_1, nämlich $= -\frac{AS}{SA_1}$.

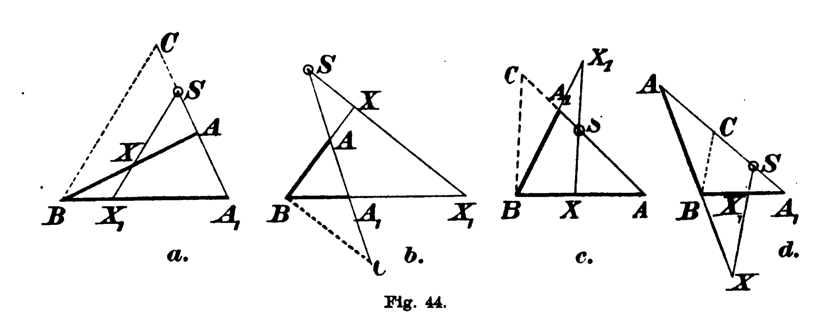


Fig. 44.

a) *Die Strecken von einem Punkt und von seinem Bild bis zum Schnittpunkt ihrer Geraden werden durch jeden beliebigen Strahl des Strahlpunktes in unverändertem Doppelverhältnis geteilt. Dieses ist entgegengesetzt dem Verhältnis, in dem die Strecke des Punktes und seines Bildes vom Strahlpunkt geteilt wird.*

Dem im folgenden gegebenen Beweis dieses Satzes fügen wir in b) die ältere und gebräuchlichere Fassung des Satzes bei.

Man zeichne in dem Dreieck ABA_1 mit der Schnittgeraden SXX_1 die Gerade $BC \parallel SXX_1$; dann ergibt sich:

$$AX : XB = AS : SC, \qquad A_1 X_1 : X_1 B = A_1 S : SC,$$

somit
$$\frac{AX}{XB} : \frac{A_1 X_1}{X_1 B} = -\frac{AS}{SA_1}.$$

Diese Gleichung läßt sich umformen in die folgende:

$$\frac{XB}{AX} \cdot \frac{BX_1}{X_1 A_1} \cdot \frac{A_1 S}{SA} = -1; \qquad \text{d. h.:}$$

b) *Die Seiten eines Dreiecks werden durch die Schnittpunkte einer Geraden so geteilt, daß das Produkt aus den drei der Reihe nach genommenen Teilverhältnissen* $= -1$ *ist.* (Satz von Menelaos, 80 n. Ch.)

2. Nehmen wir umgekehrt an, es seien auf den Seiten des Dreiecks ABA_1 die drei Punkte X, X_1 und S so gewählt, daß

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BX_1}{X_1 A_1} \cdot \frac{A_1 S}{SA} = -1,$$

so liegen die drei Punkte X, X_1, S auf einer Geraden. Denn würde SX die Gerade $A_1 B$ in X_2 treffen, so wäre nach 1:

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BX_2}{X_2 A_1} \cdot \frac{A_1 S}{SA} = -1,$$

somit müßte
$$\frac{BX_2}{X_2A_1} = \frac{BX_1}{X_1A_1}$$
sein, d. h. X_1 muß mit X_2 zusammenfallen (S. 13, § 5,1). Also:

Wenn die drei Seiten eines Dreiecks durch drei Teilpunkte so geteilt werden, daß das Produkt aus den dreien der Reihe nach genommenen Teilverhältnissen $= -1$ *ist, so liegen die drei Punkte auf einer Geraden.*

3. Wenn zum Beispiel in Fig. 37 (S. 35) die Halbmesser der drei Kreise r_1, r_2, r_3 sind, so ist:
$$\frac{M_1S_3}{S_3M_2} = -\frac{r_1}{r_2}, \quad \frac{M_2S_1}{S_1M_3} = -\frac{r_2}{r_3}, \quad \frac{M_3S_2}{S_2M_1} = -\frac{r_3}{r_1},$$
also
$$\frac{M_1S_3}{S_3M_2} \cdot \frac{M_2S_1}{S_1M_3} \cdot \frac{M_3S_2}{S_2M_1} = -1,$$
woraus sofort der Satz von den Ä.-Punkten dreier Kreise (S. 35, § 12,4) folgt.

4. Wenn von einem Punkt S ein Dreistrahl durch die Ecken eines Dreiecks ABC gelegt wird, so ergibt sich für das Dreieck ABA_1 mit der Schnittgeraden CSC_1 nach 1b:
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BC}{CA_1} \cdot \frac{A_1S}{SA} = -1$$
und für $\triangle AA_1C$ mit BSB_1:
$$\frac{A_1B}{BC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AS}{SA_1} = -1,$$
woraus durch Vervielfachung beider Gleichungen folgt:

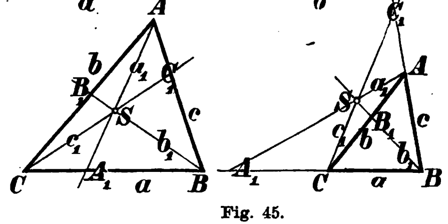


Fig. 45.

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = +1; \qquad \text{d. h.:}$$

In einem Dreieck teilen die Geraden von einem Punkt nach den Ecken die Seiten so, daß das Produkt aus den drei der Reihe nach genommenen Teilverhältnissen $= +1$ *ist.* (Satz von Ceva 1678.)

5. Umgekehrt gilt:

Wenn in einem Dreieck drei Punkte die Seiten so teilen, daß das Produkt aus den drei der Reihe nach genommenen Teilverhältnissen $= +1$ *ist, so schneiden einander die Eckstrahlen dieser Punkte in einem einzigen Punkt.*

Denn wenn $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = +1$ ist, und wenn BB_1 und CC_1 einander in S schneiden, während AS die Seite BC in A_2 treffe, so wäre (nach 4) auch: $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = +1$, also wird $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA_2}{A_2C}$, d. h. A_2 muß auf A_1 fallen (S. 13, § 5,1).

6. Hieraus ergeben sich die nachfolgenden Sätze über die besonderen Punkte des Dreiecks:

a) *Die drei Schwerlinien eines Dreiecks gehen durch einen Punkt, den Schwerpunkt.*

Denn hier ist jedes Teilverhältnis der Seiten $= +1$.

b) *Die Halbierenden der Innenwinkel eines Dreiecks gehen durch einen Punkt, ebenso die Halbierenden der Außenwinkel zweier Ecken und des Innenwinkels der dritten Ecke.*

Denn nach § 7, 2 (S. 20) verhält sich hier:

$$AC_1 : C_1B = AC : CB, \quad BA_1 : A_1C = BA : AC, \quad CB_1 : B_1A = CB : BA,$$

wobei die Vervielfachung der rechts stehenden Verhältnisse den Wert $+1$ gibt.

c) *Die Höhen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.*

Denn hier liegen je zwei Höhen gewendet parallel im Zweistrahl ihrer Grundseiten, so daß

$$AC_1 \cdot AB = AB_1 \cdot AC, \quad BA_1 \cdot BC = BC_1 \cdot BA, \quad CB_1 \cdot CA = CA_1 \cdot CB.$$

Das Produkt der drei linken Seiten ist gleich dem der drei rechten, also ist das Verhältnis beider Produkte $= +1$.

d) *Die Eckstrahlen eines Dreiecks nach den Berührungspunkten eines ein- oder anbeschriebenen Kreises gehen durch einen Punkt.*

Dies folgt aus der Gleichheit der beiden Berührenden von einem Punkt an einen Kreis.

7. Durch 6 beliebige Punkte eines Kreises läßt sich ein Dreiseit 23, 45, 61 oder QSR legen, in dem die drei übrigen Seiten 12, 34 und 56

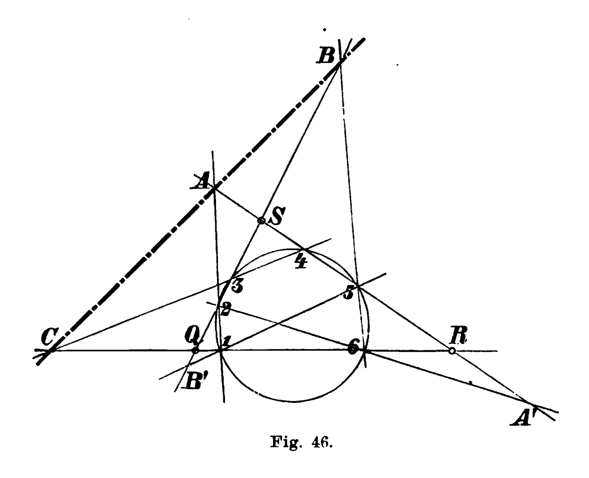


Fig. 46.

Schnittgeraden sind; für diese ergibt der Satz von Menelaos:

$$\frac{SA}{AR} \cdot \frac{R1}{1Q} \cdot \frac{Q2}{2S} = -1$$

$$\frac{RC}{CQ} \cdot \frac{Q3}{3S} \cdot \frac{S4}{4R} = -1$$

$$\frac{QB}{BS} \cdot \frac{S5}{5R} \cdot \frac{R6}{6Q} = -1$$

Vervielfacht man die Produkte miteinander und streicht folgende gleiche Produkte im Zähler und Nenner:

$$R1 \cdot R6 = 4R \cdot 5R$$
$$Q2 \cdot Q3 = 1Q \cdot 6Q$$
$$S4 \cdot S5 = 2S \cdot 3S,$$

so bleibt:
$$\frac{SA}{AR} \cdot \frac{RC}{CQ} \cdot \frac{QB}{BS} = -1,$$

woraus nach der Umkehrung des Satzes von Menelaos (2) folgt, daß A, B, C auf einer Geraden liegen.

In jedem Sehnensechseck eines Kreises schneiden sich die Gegenseiten in 3 Punkten einer Geraden. (Satz von Pascal, 1640.) Vgl. S. 36, § 12,7.

Der Satz gilt für jede beliebige Ordnung der Punkte, z. B. folgt für das Sechseck 45 16 23 die Pascalsche Gerade $A'B'C$.

§ 15. Vier harmonische Punkte und ihre Bilder.

1. Für alle Punkte einer Geraden A_1QB_1 (Fig. 47) erhält man durch Bestrahlung von einem Punkt S auf einer zweiten Geraden Bildpunkte AQB mit Ausnahme des Punktes R_1 auf dem Strahl $SR_1 \parallel AB$. Je mehr ein Punkt auf A_1B_1 sich dem Punkt R_1 nähert, desto weiter rückt sein Bild auf AB hinaus, und zwar rückt bei der Annäherung in der Richtung B_1R_1 das Bild in der Richtung AB über B weiter hinaus; bei der Annäherung an R_1 von der entgegengesetzten Seite rückt es in der Richtung BA über A hinaus. Der Punkt R_1, der durch den parallelen Strahl zu AB erhalten wird, heißt der Fluchtpunkt zu AB oder das Bild des unendlich fernen Punktes von AB.

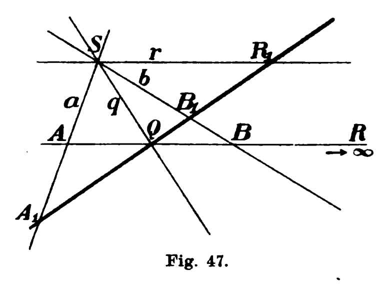


Fig. 47.

2. Geht man auf AB von A aus um gleiche Strecken weiter, $AQ = QB$, so werden die Bilder dieser Strecken gegen den Fluchtpunkt hin immer kleiner. Es verhält sich nämlich im Zweistrahl von A_1 und von B_1:

$$\frac{A_1Q}{A_1R_1} = \frac{AQ}{SR_1} = \frac{QB}{SR_1} = \frac{QB_1}{B_1R_1},$$

also auch $\frac{A_1 Q}{Q B_1} = \frac{A_1 R_1}{B_1 R_1} > 1, \quad Q B_1 < A_1 Q.$

Ferner folgt: $\frac{A_1 Q}{Q B_1} = -\frac{A_1 R_1}{R_1 B_1}.$

Für irgend eine Parallele zu $A_1 B_1$ gilt (nach S. 15, § 5, 2) das gleiche, also für alle Bilder von $AQBR_\infty$, d. h. (nach § 7, 3):

a) *Das Bild einer Strecke wird durch das Bild ihres Mittelpunktes und durch den Fluchtpunkt (das Bild des unendlich fernen Punktes) harmonisch geteilt.*

Und umgekehrt: wenn $A_1 Q B_1 R_1$ vier harmonische Punkte sind, und wenn R_1 als Fluchtpunkt angenommen wird, d. h. $AB \parallel SR_1$, so folgt, daß $AQ = QB$ ist, d. h.:

b) *Fällt im Bild von vier harmonischen Punkten ein Punkt in unendliche Entfernung, so fällt das Bild des zugeordneten Punktes in die Mitte der Bilder der beiden andern Punkte, und umgekehrt.* (Vgl. S. 22, § 7, 8). Da nämlich auch QR_1 durch $A_1 B_1$ harmonisch geteilt wird (S. 21, § 7, 3a), so gilt das gleiche auch für die Punkte A_1 und B_1.

3. Hiernach läßt sich die Aufgabe leicht lösen: *Zu einem Teilpunkt Q einer Strecke AB den harmonisch zugeordneten Punkt R zu finden.* Man zieht durch A oder B oder Q eine Gerade, auf der man nach einerlei Richtung oder nach den Gegenrichtungen zwei gleiche Strecken aufträgt. Dann kann man A und B entweder als die Bilder der Grenzpunkte dieser Doppelstrecke und zugleich Q als Bild des Mittelpunktes oder des unendlich fernen Punktes auffassen (oder umgekehrt). Man erhält durch Verbindung der Punkte mit ihren Bildern den Strahlpunkt, von dem aus man auf die Gerade AB den noch übrigen der vier Punkte abbildet.

Folgende Figuren stellen einige solcher Lösungsarten dar.

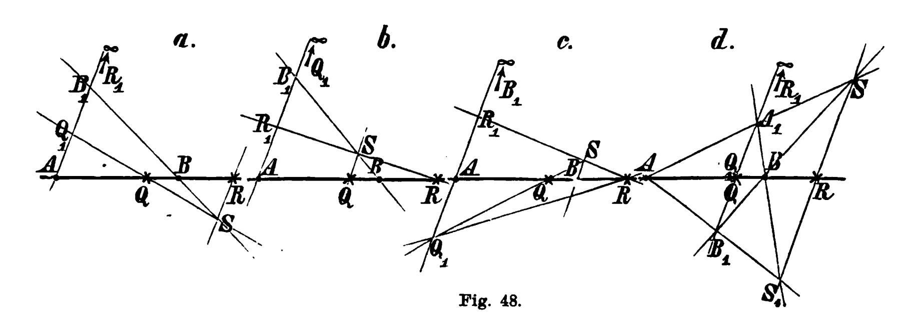


Fig. 48.

In Fig. 48a ist z. B. (nach S. 40, § 14, 1b) für $\triangle ABB_1$ mit SQQ_1 als Schnittgerade:

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BS}{SB_1} \cdot \frac{B_1 Q_1}{Q_1 A} = -1$$

woraus für $B_1 Q_1 = Q_1 A$ folgt:

$$\frac{AQ}{QB} = -\frac{B_1 S}{SB} = -\frac{AR}{RB}.$$

4. Vier Strahlen durch vier harmonische Punkte, wie (Fig. 47) $aqbr$ durch $A_1 Q B_1 R_1$, nennt man vier harmonische Strahlen; dabei heißen einander (harmonisch) zugeordnet die Strahlen q und r, ebenso a und b.

Legt man durch solche vier Strahlen eine Gerade parallel zu einem Strahl, etwa $AQB \parallel r$, so wird (nach 2b) $AQ = QB$, und jede weitere Gerade durch die Strahlen wird in harmonischen Punkten getroffen (nach 2a), da diese nun ein Bild von $AQBR_\infty$ sind. Daraus folgt:

Jedes Bild von vier harmonischen Punkten gibt wieder vier harmonische Punkte.

5. Liegen (Fig. 49) die Punkte $A_1 Q_1 B_1$ mit AQB von S aus bestrahlt, so muß der Strahl des zu Q zugeordneten Punktes R auch den zu Q_1 zugeordneten Punkt R_1 treffen, da dieser Punkt das Bild von R sein muß; also

Wenn drei Punkte einer Geraden mit drei solchen auf drei Strahlen eines Punktes liegen, so liegen die Punkte, die den Punkten eines Strahles harmonisch zugeordnet sind, auf einem vierten Strahl.

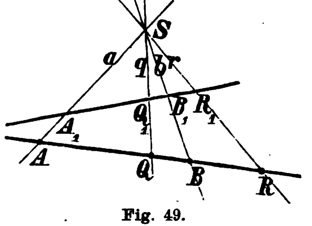


Fig. 49.

6. Hieraus folgt, daß es zu drei beliebigen Strahlen aqb nur einen Strahl r gibt, der dem Strahl Q zugeordnet ist, da auf diesem Strahl alle vierten harmonischen Punkte von beliebigen eingelegten Punktreihen liegen müssen. Also:

Zu einem Teilstrahl eines Winkels gibt es nur einen harmonisch zugeordneten Strahl.

7. Wenn die Strahlen aqb und $a_1 q_1 b_1$ einander auf der Geraden AQB schneiden, so muß der zu Q zugeordnete Punkt R sowohl auf dem q zugeordneten Strahl r, als dem q_1 zugeordneten Strahl r_1 liegen, d. h.:

Wenn drei Strahlen eines Punktes mit drei anderen solchen sich in drei Punkten einer Geraden schneiden, so schneidet sich das Strahlenpaar, das den Strahlen eines Schnittpunktes harmonisch zugeordnet ist, in einem vierten Punkt der Geraden.

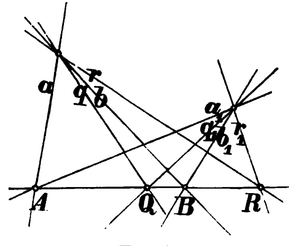


Fig. 50.

8. Aus § 7,5 (S. 21) folgt:

a) *Im Schnittpunkt zweier Geraden sind die beiden Winkelhalbierenden dieser Geraden einander harmonisch zugeordnet.*

Umgekehrt: Wenn der Strahl $q \perp r$ ist, so ist dem im Winkel qr liegenden Strahl b nur ein Strahl a zugeordnet, für welchen $\sphericalangle\, aq = qb$ ist; also:

b) *Wenn zwei harmonisch zugeordnete Strahlen senkrecht zueinander sind, so halbiert jeder derselben einen Winkel der beiden anderen Strahlen.*

§ 16. Harmonische Punkte und Strahlen im vollständigen Vierseit und Viereck.

1. Vier Gerade, von denen keine drei durch denselben Punkt gehen, die also einander in sechs Punkten schneiden, bilden ein vollständiges Vierseit.

1'. Vier Punkte, von denen keine drei in derselben Geraden liegen, die also durch sechs Gerade verbunden sind, bilden ein vollständiges Viereck.

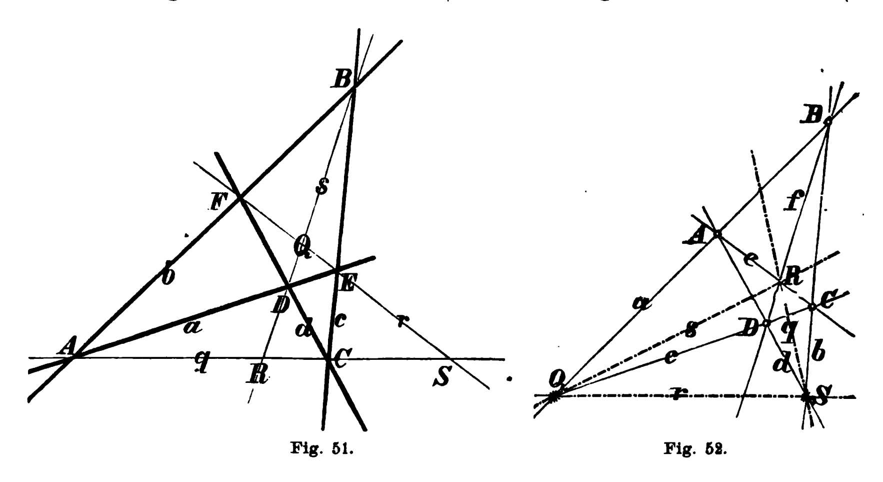


Fig. 51. Fig. 52.

z. B. die Geraden a, b, c, d, wo einander schneiden

ab in A, bc in B,
cd in C, da in D,
ac in E, bd in F.

Die Figur hat drei Paar Gegenecken A, C; B, D; E, F; deren Verbindungsgeraden q, s, r heißen Nebenseiten (Eckenlinien oder Diagonalen).

Das vollständige Vierseit enthält drei (einfache) Vierseite, nämlich das gewöhnliche $acbd$ und die

z. B. die Punkte A, B, C, D, wo die Verbindungsgeraden sind

AB oder a, BC oder b,
CD oder c, DA oder d,
AC oder e, BD oder f.

Die Figur hat drei Paar Gegenseiten a, c; b, d; e, f; deren Durchschnittspunkte Q, S, R heißen Nebenecken.

Das vollständige Viereck enthält drei (einfache) Vierecke, nämlich das gewöhnliche $ABCD$ und

zwei sog. überschlagenen *abcd* und *adbc*. (Fig. 53.)

die zwei sog. überschlagenen *ADBC*, *ACDB*. (Fig. 54.)

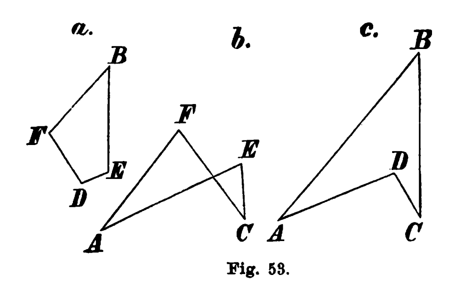


Fig. 53.

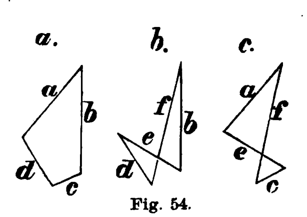


Fig. 54.

2. (Fig. 51). Die drei Punkte SCA auf q liegen erstens von D aus bestrahlt mit SFE auf r; daher muß (nach § 15, 5) das zu S zugeordnete Punktpaar R und Q auf einem Strahl durch D liegen. Zweitens liegen beide Punktreihen auch von B aus bestrahlt in der Ordnung SEF und SCA; daher muß das S zugeordnete Punktpaar Q R auch auf einem Strahl durch B liegen. Somit liegen Q und R mit B und D auf einer Geraden. FE wird durch BD und AC harmonisch geteilt.

Jede Nebenseite (der Abstand zweier Gegenecken) eines vollständigen Vierseits wird durch die Schnittpunkte mit den beiden andern Nebenseiten harmonisch geteilt.

2'. (Fig. 52.) Die drei Strahlen asc von Q werden erstens auf AD von den drei Strahlen esf von R geschnitten; daher muß (nach § 15, 7) das zu s zugeordnete Strahlenpaar r und q sich in einem Punkt von AD schneiden. Zweitens treffen beide Strahlenpaare auch auf BC in der Ordnung asc und fse zusammen; daher muß das s zugeordnete Strahlenpaar ebenfalls durch einen einzigen Punkt von BC gehen, also durch den Schnittpunkt von AD und BC. Also sind QR und QS zugeordnete Strahlen in Bezug auf ac.

Jeder Nebeneckwinkel (Winkel zweier Gegenseiten) eines vollständigen Vierecks wird durch die Strahlen nach den andern Nebenecken harmonisch geteilt.

Das erstere folgt auch daraus, daß im $\Delta\, ABC$ (Fig. 51) mit den Eckstrahlen von D die folgende Gleichheit gilt:

$$\frac{AR}{RC} \cdot \frac{CE}{EB} \cdot \frac{BF}{FA} = +1$$

und im selben Dreieck mit der Schnittgeraden EF:

$$\frac{AS}{SC} \cdot \frac{CE}{EB} \cdot \frac{BF}{FA} = -1,$$

so daß also:

$$\frac{AR}{RC} = -\frac{AS}{SC}.$$

Der Satz 2' folgt aus 2, da im Vierseit $ABCD$ (Fig. 52) die Nebenseite BD durch R und durch den Schnittpunkt von r harmonisch geteilt wird, wonach $ascr$ vier harmonische Strahlen sind.

3. Hiermit ist ein Mittel gegeben, die folgenden zwei Aufgaben nur mit dem Lineal zu lösen (vgl. § 15, 3):

a) *Zu einer gegebenen Strecke AC und ihrem Teilpunkt R den zugeordneten Punkt S zu zeichnen.*

Auf einer Geraden s durch R verbindet man zwei Punkte B und D sowohl mit A als C durch Gerade. Die Verbindungsgerade r der Schnittpunkte dieser letzteren Geraden geht dann durch den fraglichen Punkt S.

a′) *Zu einem gegebenen Winkel ac und seinem Teilstrahl r den zugeordneten Strahl s zu zeichnen.*

Durch einen Punkt S auf r zieht man zwei Gerade b und d und verbindet deren Schnittpunkte mit a und c untereinander. Der Schnittpunkt R dieser Verbindungsgeraden liegt dann auf dem fraglichen Strahl s.

§ 17. Harmonische Punkte und Strahlen im Kreis. Pol und Polare, Viereck, Vierseit und Sechsseit des Kreises.

1. Zwei Punkte BB_1, die einen Kreisdurchmesser AA_1 harmonisch teilen, heißen harmonisch zugeordnete Pole des Kreises; die Senkrechte B_1B_2 zum Durchmesser in einem der Punkte heißt die Polare des andern Punktes B; dieser heißt der Pol der Senkrechten.

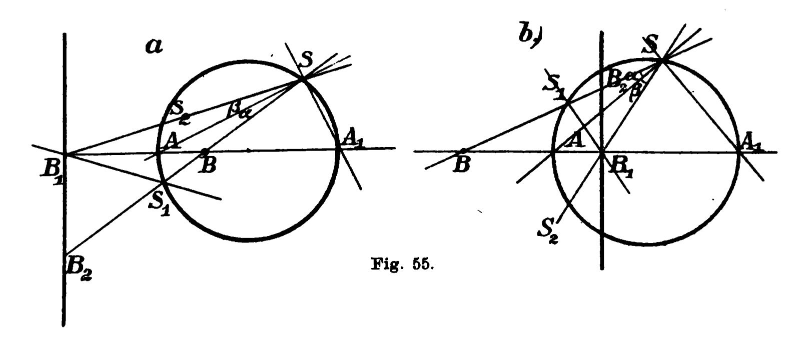


Fig. 55.

Für die nach den vier harmonischen Punkten ABA_1B_1 gezogenen Strahlen eines Scheitels S, der auf der Kreislinie liegt, ist nun $SA \perp SA_1$; somit nach § 15,8b (S. 46) $\sphericalangle B_1SA = ASB$.

Daher ist nach § 7, 2 (S. 20)

$$SB : SB_1 = BA : AB_1.$$

Umgekehrt: Nehmen wir an, irgend ein Punkt S der Ebene liege so, daß $SB : SB_1 = BA : AB_1$; dann ist SA die Winkelhalbierende zu BSB_1, da nur ein Strahl von S die Strecke BB_1 in dem Verhältnis der Seiten SB und SB_1 teilt. Der zu SA harmonische Strahl SA_1 ist dann senkrecht zu SA, $\sphericalangle ASA_1 = R$; also liegt S auf dem Kreis um AA_1.

Der Ort der Punkte S, deren Abstände von den Grenzpunkten einer

Strecke BB_1 ein bestimmtes Verhältnis haben, ist der Kreis, von dem die Grenzpunkte eines Durchmessers AA_1 die Strecke im selben Verhältnis harmonisch teilen. (Kreis des Apollonius, etwa 220 v. Chr.).

2. Da $\sphericalangle \alpha = \beta$ ist, so ist auch Bogen $AS_1 = AS_2$, und der Durchmesser AA_1 ist Mittellinie zu $S_1 S_2$ (I. Teil § 27, 5c) und halbiert als solche auch den Winkel $S_1 B_1 S_2$. Daher gehen auch von B_1 vier harmonische Strahlen aus, und SBS_1B_2 sind vier harmonische Punkte auf dem beliebigen Strahl SS_1 durch B.

a) *Die Sehnen auf den Strahlen eines Punktes nach einem Kreis werden durch den Punkt und seine Polare harmonisch geteilt;*
— oder, da der einem Punkt harmonisch zugeordnete Punkt eindeutig bestimmt ist:

b) *Der einem Teilpunkt einer Sehne harmonisch zugeordnete Punkt liegt auf der Polare des Teilpunktes.*

3. Ist B ein Punkt außerhalb eines Kreises, SS_1 dessen Berührungssehne, so ist der Durchmesser AA_1, der von B aus gezogen ist, die Mittellinie zu SS_1 (I. Teil § 27, 5c), also Bogen $SA = AS_1$ und $\sphericalangle \alpha = \delta$. Da noch $\sphericalangle ASA_1 = R$, so sind die Strahlen von S nach BAB_1A_1 vier harmonische Strahlen, und B und B_1 sind harmonisch zugeordnete Pole, d. h.:

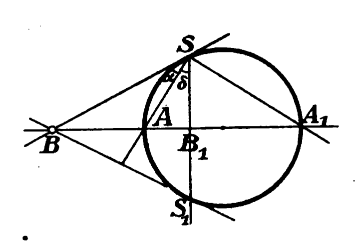


Fig. 56.

a) *Die Polare eines Punktes außerhalb des Kreises ist die Berührungssehne seiner Berührenden.*	a′) *Der Pol zu einer Sehne ist der Schnittpunkt der in ihren Grenzpunkten Berührenden.*

Wenn Pol oder Polare sich mehr und mehr der Kreislinie nähern, so folgt schließlich (vgl. S. 22, § 7, 8):

b) *Die Polare eines Punktes der Kreislinie ist dessen Berührende.*	b′) *Der Pol einer Berührenden des Kreises ist deren Berührungspunkt.*

Je näher dagegen Pol oder Polare gegen den Mittelpunkt rückt, desto weiter rücken deren zugeordnete Stücke hinaus. Da einem Punkt oder einer Geraden immer nur ein solches zugeordnetes Stück entspricht, so gebraucht man auch für den Mittelpunkt und irgend einen Durchmesser die folgende Redeweise:

c) *Die Polare des Mittelpunkts ist die unendlich ferne Gerade der Ebene.*	c′) *Der Pol eines Durchmessers ist der unendlich ferne Punkt der zum Durchmesser senkrechten Geraden.*
Denn alle Durchmesser werden im Mittelpunkt halbiert; die zuge-	Denn alle zu dem Durchmesser senkrechten Sehnen werden durch

ordneten Punkte liegen somit in unendlicher Entfernung (S. 22, § 7, 8). | diesen halbiert; die zugeordneten Punkte sind also in unendlicher Entfernung in der zum Durchmesser senkrechten Richtung.

4. Zwei Strahlen von einem Punkt R oder Q nach einem Kreis bestimmen durch ihre Schnittpunkte ein vollständiges Viereck $ABCD$. Seine Sehnen bilden ein Vierseit $ABCD$, in dem die Nebenseiten CA und BD durch R und die Nebenseite SQ harmonisch geteilt werden; daher ist SQ Polare zu R. Von S (oder Q) gehen nun vier harmonische Strahlen nach diesen harmonischen Punkten, die auch die Strahlen von Q (oder S) harmonisch teilen; daher ist SR Polare zu Q (QR Polare zu S). Dies folgt auch unmittelbar aus dem Vierseit $ADBC$ ($ABDC$). Die Punkte RQS sind aber Nebenecken im Viereck $ABCD$; also gilt:

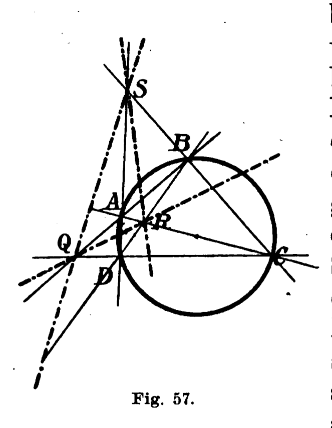


Fig. 57.

In jedem Sehnenviereck ist ein Nebeneck der Pol zur Verbindungsgeraden der beiden andern Nebenecken.

Dies kann man mit Rücksicht auf 3a benutzen zur Lösung der Aufgabe:

Die Berührungspunkte der von einem gegebenen Punkt Q aus an einen Kreis gehenden Berührenden nur mit dem Lineal *zu finden;* man zieht (Fig. 57) QAB und QDC beliebig und zeichnet RS, — oder man zieht noch (Fig. 58) eine dritte Gerade QXY und zeichnet RT.

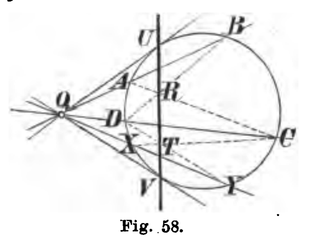


Fig. 58.

5. Wenn a die Polare des Punktes A, b die des Punktes B ist, und wenn S der Schnittpunkt beider Polaren, so liegen auf den Geraden SA und SB je vier harmonische Punkte, von denen A und B zu S zugeordnet sind. Daher gehören A und B der Polare zu S an (2b), und S ist der Pol der Geraden AB. Also ergeben sich die Sätze:

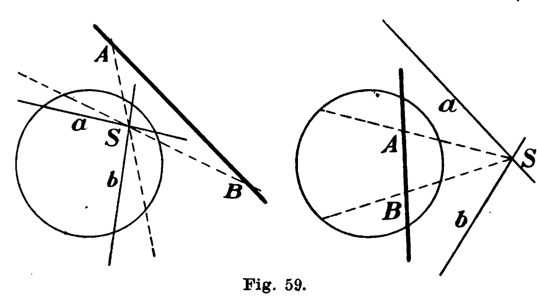


Fig. 59.

a) *Die Polaren zu den Punkten einer Geraden schneiden einander im Pol der Geraden.*

a′) *Die Pole zu den Strahlen eines Punktes liegen auf der Polare des Punktes.*

In Verbindung mit 3a und 3a′ heißt dies:

b) *Zieht man von den Punkten einer Geraden je die beiden Berührenden an den Kreis, so geht deren Berührungssehne stets durch den Pol der Geraden.*

b′) *Zieht man zu den Strahlen eines Punktes je in den beiden Schnittpunkten mit dem Kreis die Berührenden, so liegt deren Schnittpunkt stets auf der Polare des Punktes.*

6. Diese Sätze begründen eine eigentümliche Beziehung zwischen Punktgebilden und Geradengebilden: Wird in der Ebene einer Figur ein beliebiger Kreis angenommen, und wird zu jedem Punkt der Figur die Polare, zu jeder ihrer Geraden der Pol bestimmt, so entsteht die zur ersteren Figur polare Figur; in gleicher Weise entsteht aus der letzteren die erstere, so daß beide als wechselseitig polare Figuren (oder als reziproke Figuren) bezeichnet werden.

Aus bekannten Eigenschaften der einen Figur lassen sich nun häufig gewisse Eigenschaften der anderen Figur erweisen. Eine solche Eigenschaft ist nun zunächst die auf die Lage bezügliche, daß einander jeweils Punkte einer Geraden und Strahlen eines Büschels entsprechen.

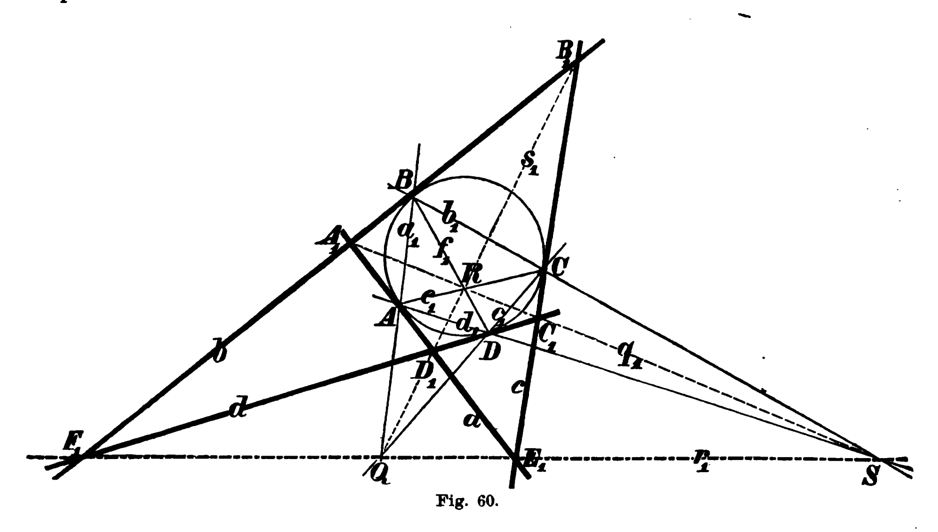


Fig. 60.

7. So gehört zu dem Sehnenviereck $ABCD$ (Fig. 60) als polare Figur das berührende Vierseit $abcd$ (3a); [den sechs Seiten des ersteren $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1$ entsprechen polar die sechs Ecken $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ des letzteren (3a′)]. Den Nebenecken Q, R, S des ersteren müssen polar entsprechen die Nebenseiten $q_1 r_1 s_1$ des letzteren (5b′). Da aber die Polaren

zu Q, R, S (nach 4) die Geraden RS, SQ, QR sind, so müssen diese Geraden mit $q_1 r_1 s_1$ zusammenfallen; m. a. W.:

a) *Von einem durch vier Punkte des Kreises bestimmten Sehnenviereck und berührenden Vierseit*

liegen je zwei Nebenecken des ersteren auf einer Nebenseite des letzteren.	*schneiden einander je zwei Nebenseiten des letzteren in einem Nebeneck des ersteren.*

Damit ist auch der dem Satz 4 entsprechende gegeben:

b) *In jedem berührenden Vierseit ist eine Nebenseite die Polare zum Schnittpunkt der andern Nebenseiten.*

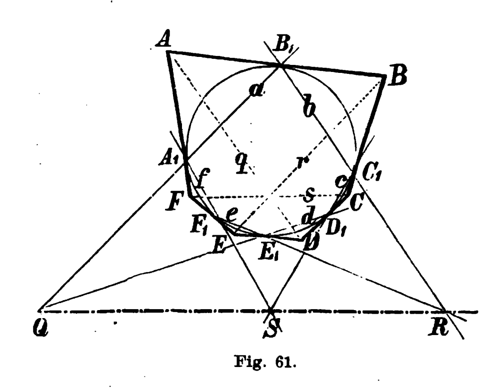


Fig. 61.

8. Dem Sechseck im Kreis entspricht polar das berührende Sechsseit, dem Satz von Pascal (S. 36, § 12, 7 und S. 42, § 14, 7) der Satz von Brianchon (1806):

Im Berührungssechsseit des Kreises gehen die Verbindungsgeraden der Gegenecken durch einen Punkt.

In dem berührenden Sechsseit (Fig. 61) $ABCDEF$ entsprechen die Verbindungsgeraden qrs der Gegenecken polar den Schnittpunkten Q, R, S der Gegenseiten des Sechsecks $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ (5 b'). Da die Punkte Q, R, S auf einer Geraden liegen, so müssen die Geraden q, r, s durch einen Punkt gehen, durch den Pol dieser Geraden (5 a).

9. Die in § 23, 7 angegebenen Ableitungen aus den Sätzen von Pascal und Brianchon lassen sich auch hier schon anschließen.

Fünftes Kapitel.

Abbildung beliebiger Punktreihen und Strahlenbüschel.

§ 18. Abbildung von Punktreihen. Das Doppelverhältnis.

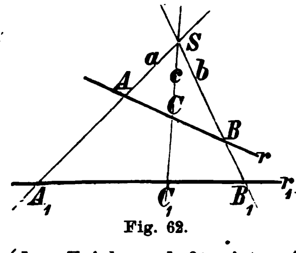


Fig. 62.

1. Werden die Punkte ABC einer Geraden durch ein Strahlenbüschel S auf eine zweite Gerade in $A_1 B_1 C_1$ abgebildet, so nennt man beide Punktreihen gegenseitig bestrahlt oder perspektiv (ABC 𝔭. $A_1 B_1 C_1$). Wenn Punktreihen zweier Geraden in diese Lage gebracht werden können, heißen sie gegenseitig bestrahlbar oder projektiv (das Zeichen dafür ist: $ABC \barwedge A_1 B_1 C_1$).

Drei Punkte ABC einer Reihe können stets mit drei Strahlen eines Büschels abc perspektiv gelegt werden, entweder indem man jene in diese einlegt, oder indem man letztere an erstere anlegt.

Im ersten Fall bestimmt man zunächst die Richtung der Strecke, indem man etwa auf dem Teilstrahl b

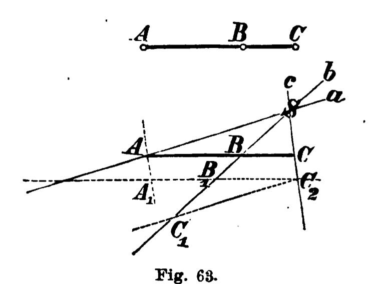


Fig. 63.

die geteilte Strecke vom Scheitel nach SB_1C_1 abträgt und durch C_1 die $C_1C_2 \parallel a$ zieht; parallel zu B_1C_2 ist dann die Strecke $AC = A_1C_2$ in den Winkel ac einzutragen. — Die Zeichnung läßt sich in gleicher Weise auf den Gegenstrahlen ausführen, nicht aber in einem anderen Abstand oder einer anderen Richtung, da gleichgeteilte Strecken im Dreistrahl parallel sind (S. 16, § 5,4).

Drei Punkte ABC einer Geraden lassen sich stets in drei Gerade abc eines Punktes legen, jedoch nur in zwei Lagen, für welche der Strahlpunkt Mittelpunkt ist.

Im zweiten Fall beschreibt man über AB und BC als Sehnen je einen Kreisbogen, der den Winkel

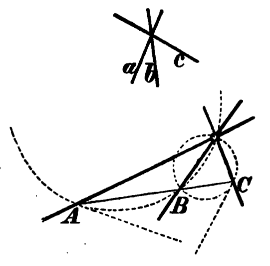


Fig. 64.

ab und bc faßt (I. Teil, § 34, 6); der Schnitt der Bögen ist dann Strahlpunkt. — Die Zeichnung läßt sich in gleicher Weise auf der Gegenseite von ABC ausführen, so daß dann AC Mittellinie der Figur wird, nicht aber in irgend einer anderen Weise, da der Schnittpunkt der Kreise auf jeder Seite eindeutig bestimmt ist.

Drei Gerade abc eines Punktes lassen sich stets an drei Punkte ABC einer Geraden legen, jedoch nur in zwei Lagen, für welche die Gerade Mittellinie ist.

2. Drei Punkte $A_1B_1C_1$ einer zweiten Geraden lassen sich dann mit der ersten Punktreihe ABC in denselben Büschel legen. Also:

Drei Punkte einer Geraden können stets als Bild dreier beliebigen Punkte einer zweiten Geraden betrachtet werden; sie liegen gegenseitig bestrahlt, wenn ein Punkt mit seinem Bild zusammenfällt.

Denn wenn B auf B_1 fällt, so erhält man als Strahlpunkt S den Schnittpunkt von AA_1 und CC_1.

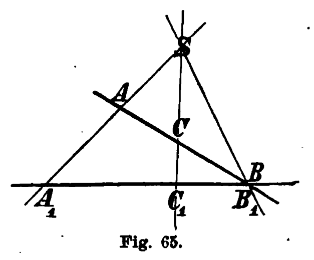


Fig. 65.

3. Wenn $A_1 X_1 B_1$ das Bild von AXB ist und C der Schnittpunkt beider Geraden, so ist (nach S. 40, § 14, 1a):

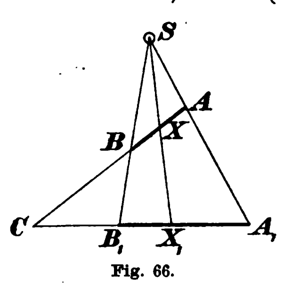


Fig. 66.

$$\frac{AX}{XC} : \frac{A_1 X_1}{X_1 C} = -\frac{AS}{SA_1}, \quad \frac{BX}{XC} : \frac{B_1 X_1}{X_1 C} = -\frac{BS}{SB_1};$$

somit folgt durch Teilung:

$$\frac{AX}{XB} : \frac{A_1 X_1}{X_1 B_1} = \frac{AS}{SA_1} : \frac{BS}{SB_1}.$$

Bei einer Strecke und ihrem Bild bleibt das Doppelverhältnis für jeden Teilpunkt und sein Bild das gleiche — und zwar gleich dem Doppelverhältnis, in dem der Strahlpunkt (S) die Strecke zwischen den Anfangspunkten (AA_1) und die zwischen den Endpunkten (BB_1) teilt.

4. Wenn $A_1 B_1 C_1 D_1$ das Bild von $ABCD$ ist, so kann man die Strecke AC als durch B und D geteilt ansehen, ebenso $A_1 C_1$ geteilt durch B_1 und D_1; dann ist:

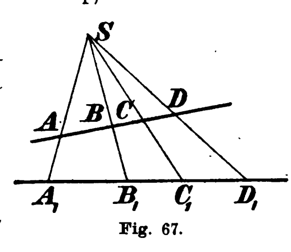


Fig. 67.

$$\frac{AB}{BC} : \frac{A_1 B_1}{B_1 C_1} = \left(\frac{AS}{SA_1} : \frac{CS}{SC_1}\right) = \frac{AD}{DC} : \frac{A_1 D_1}{D_1 C_1}$$

oder

$$\frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC} = \frac{A_1 B_1}{B_1 C_1} : \frac{A_1 D_1}{D_1 C_1}.$$

Das Doppelverhältnis einer zweifach geteilten Strecke bleibt in jedem Bild der Strecke und ihrer Teilpunkte unverändert.*

5. Umgekehrt: Man nimmt an, vier Punkte $ABCD$ einer Reihe und vier Punkte $A_1 B_1 C_1 D_1$ einer zweiten Reihe (die nicht mit ersterer in einem Büschel liegt) haben solche Abstände und Lage, daß:

$$\frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC} = \frac{A_1 B_1}{B_1 C_1} : \frac{A_1 D_1}{D_1 C_1}.$$

Dann lassen sich ABC und $A_1 B_1 C_1$ (nach 1) in einen Strahlenbüschel abc legen. Wäre dann in diesem Strahlenbüschel X das Bild von D, so müßte $\frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC} = \frac{A_1 B_1}{B_1 C_1} : \frac{A_1 X}{XC_1}$ sein, also $\frac{A_1 X}{XC_1} = \frac{A_1 D_1}{D_1 C_1}$, woraus folgt, daß X auf D_1 fällt (S. 15, § 5, 1). Hieraus ergeben sich die Sätze:

a) *Wenn das Doppelverhältnis einer zweifach geteilten Strecke übereinstimmt mit dem einer andern solchen, so ist die eine Punktreihe ein Bild der anderen.*

---

*) In einem Strahlenbüschel $abcd$ und seinem Bild $a_1 b_1 c_1 d_1$ gilt die entsprechende Gleichung für die Sinus der Winkel, nämlich:

$$\frac{\sin(ab)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(dc)} = \frac{\sin(a_1 b_1)}{\sin(b_1 c_1)} : \frac{\sin(a_1 d_1)}{\sin(d_1 c_1)},$$

wie sich aus dem Sinussatz ableiten läßt. Hiernach können die Sätze von den Strahlenbüscheln (§ 19) unabhängig von denen der Punktreihen abgeleitet werden.

b) *Wenn zu 3 Punkten einer Geraden 3 solche als Bilder gewählt sind, so ist zu jedem weiteren Punkt das Bild eindeutig bestimmt, nämlich durch das Doppelverhältnis der Teilungen.*

c) *Eine Punktreihe und ihr Bild liegen in einem Strahlenbüschel, wenn dies für drei entsprechende Paare der Fall ist (insbesondere, wenn ein Punkt sein Bild deckt).*

Denn legt man (nach 1) drei Punkte des Bildes $A_1 B_1 C_1$ in den Büschel S der Punktreihe $ABCD$ ein, so bestimmt die Gerade dieser Punkte $A_1 B_1 C_1$ ein Bild in dem Büschel, das mit dem gegebenen Bild $A_1 B_1 C_1 D_1$ übereinstimmt (b).

Hiermit ist auch bewiesen:

d) *Das Bild einer Punktreihe kann in jedes Strahlenbüschel der Punktreihe eingelegt werden.*

§ 19. Abbildung von Strahlenbüscheln.

1. Wie eine Punktreihe dann ein Bild einer anderen genannt wird, wenn beide in ein Strahlenbüschel eingelegt werden können, so heißt ein Strahlenbüschel ein (projektives $\barwedge$) Bild eines andern, wenn beide so durch eine Punktreihe gelegt werden können, daß die Strahlen einander paarweis auf der Geraden, der Bildachse, schneiden (vgl. § 21, 2).

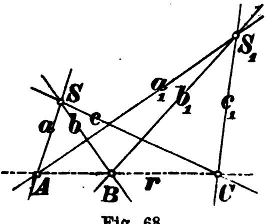


Fig. 68.

In Fig. 68 ist $a_1 b_1 c_1$ ein Bild von abc, $S\,(abc) \barwedge S\,(a_1 b_1 c_1)$; sie liegen auch perspektiv ($\mathfrak{p}$) zu der Bildachse r $[abc\,\mathfrak{p}.\,a_1 b_1 c_1]$.

2. Zunächst gilt für die Beziehung des Strahlenbüschels zur Punktreihe:

Wenn eine Punktreihe von einem Strahlenbüschel bestrahlbar sein soll, so können drei beliebige Punkte und drei beliebige Strahlen einander zugeordnet werden; dann sind die übrigen Elemente des einen Gebildes durch die des anderen eindeutig bestimmt.

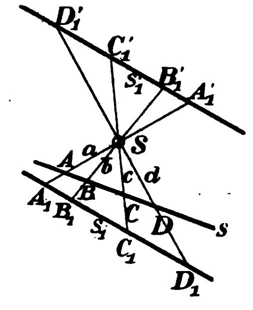


Fig. 69.

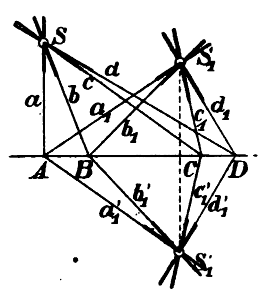


Fig. 70.

Nach § 18, 1 kann man nämlich in die drei Strahlen abc des Büschels

Nach § 18, 1' kann man nämlich durch die drei Punkte ABC der

abcd die drei Punkte $A_1 B_1 C_1$ einer Geraden zwar in zwei Lagen $A_1 B_1 C_1$ und $A_1' B_1' C_1'$ einlegen, aber für beide Lagen ist der Strahlpunkt Mittelpunkt. Daher stimmen die beiden Punktreihen vollkommen überein. Von einer andern Punktreihe *ABCD* im Büschel *abcd* stimmt schon *ABC* nicht mit $A_1 B_1 C_1$ überein.

Reihe *ABCD* die drei Strahlen $a_1 b_1 c_1$ eines Punktes zwar von zwei Punkten S_1 und S_1' ($a_1 b_1 c_1$ und $a_1' b_1' c_1'$) legen; aber für beide Büschel ist die Bildachse Mittellinie. Daher stimmen die beiden Büschel vollkommen überein. — Von einem andern Büschel *abcd* an *ABCD* stimmt schon *abc* nicht mit $a_1 b_1 c_1$ überein.

3. Je drei Strahlen *abc* und $a_1 b_1 c_1$ zweier Büschel S und S_1 lassen sich stets paarweise durch drei Punkte einer Geraden legen, m. a. W.:

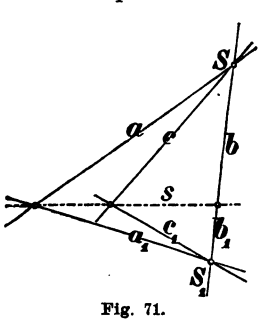


Fig. 71.

Zu drei Strahlen eines Punktes können stets drei beliebige Strahlen eines anderen Punktes als Bilder gewählt werden; sie liegen an einer Punktreihe als Bildachse, wenn ein Strahl auf sein Bild fällt.

Denn wenn b auf b_1 fällt, so erhält man als Bildachse die Gerade s durch die Schnittpunkte von aa_1 und cc_1.

4. Ist $a_1 b_1 c_1 d_1$ ein Bild von *abcd* mit *ABCD* als Bildachse, und ist $A_2 B_2 C_2 D_2$ irgend eine Punktreihe im Büschel *abcd,* so läßt sich (nach § 18,5d) die Punktreihe $A_2 B_2 C_2 D_2$ als Bild von *ABCD* auch in den Büschel $a_1 b_1 c_1 d_1$ einlegen, etwa nach $A_1 B_1 C_1 D_1$. Dann kann aber $A_1 B_1 C_1 D_1$ zugleich mit seinem Strahlenbüschel S_1 ($A_1 B_1 C_1 D_1$) oder $a_1 b_1 c_1 d_1$ wieder an $A_2 B_2 C_2 D_2$ angelegt werden.

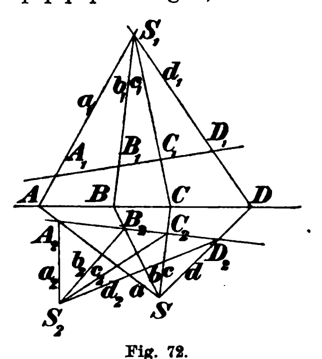


Fig. 72.

Das Bild eines Strahlenbüschels kann an jede Punktreihe in dem Büschel angelegt werden.

5. Nach 2 läßt sich nun an jede Punktreihe in *abcd* außer dem Bild $a_1 b_1 c_1 d_1$ nicht noch ein anderer Büschel $a_1 b_1 c_1 d_2$ anlegen, von dem bloß die Winkel der drei ersten Strahlen mit denen von $a_1 b_1 c_1$ übereinstimmen. Daraus folgt:

a) *Wenn zu drei Strahlen eines Punktes drei solche als Bilder gewählt sind, so ist zu jedem weiteren Strahl das Bild eindeutig bestimmt.*

Hat man dann drei Strahlen $a_1 b_1 c_1$ des Bildes $a_1 b_1 c_1 d_1$ zu *abcd* an drei Punkte einer Reihe in *abcd* angelegt, und zieht man vom Strahlpunkt S_1 dieser drei Strahlen weitere Strahlen durch die folgenden Punkte der Reihe in *abcd,* so erhält man das Bild von *abcd,* das die Strahlen

$a_1 b_1 c_1$ enthält; dieses stimmt aber nach a) vollkommen überein mit $a_1 b_1 c_1 d_1$, — d. h.:

b) *Ein Strahlenbüschel und sein Bild liegen an einer Punktreihe (Bildachse), wenn dies für drei entsprechende Strahlenpaare der Fall ist (insbesondere wenn ein Strahl sein Bild deckt).*

6. Die Sätze § 18, 5 d und 19, 4 lassen sich zusammenfassen:

Wenn von Punktreihen und Strahlenbüscheln irgend zwei Gebilde mit einem dritten bestrahlbar sind, so sind sie es untereinander.

Hierbei lassen sich 6 Fälle unterscheiden: $P_1 \barwedge P_3 \barwedge P_2$, ferner $P_1 \barwedge P_3 \barwedge S_2$, u. s. w.

§ 20. Bilder von Punktreihen und Strahlenbüscheln außerhalb der bestrahlten Lage.

1. Aufgabe: *Drei Punkte oder Strahlen und ihre Bilder sind in nicht bestrahlter Lage gegeben; man soll zu einem beliebigen vierten das Bild bestimmen.*

Ist $ABC \barwedge A_1 B_1 C_1$, so nimmt man auf der Verbindungsgeraden AA_1 (a) die Punkte S und S_1 als Strahlpunkte der Büschel abc p.

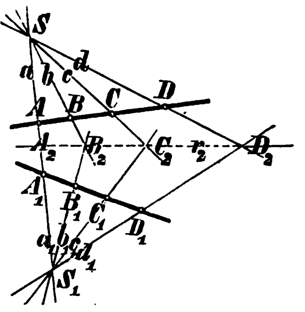


Fig. 73.

ABC, $a_1 b_1 c_1$ p. $A_1 B_1 C_1$. Nun ist abc p. $a_1 b_1 c_1$ (S. 54, § 19, 3), und ihre Achse r_2 ergibt eine von ABC und $A_1 B_1 C_1$ bestrahlte Punktreihe $A_2 B_2 C_2$, so daß zu einem Punkt D leicht D_2 und dann D_1 zu finden ist.

2. Die Scheitel S und S_1 können auch nach A_1 und A (Fig. 75) verlegt werden. Dann wird der Schnittpunkt ($E_1 F$) beider Träger vom Strahlpunkt A nach E und vom

Ist $abc \barwedge a_1 b_1 c_1$, so zieht man durch den Schnittpunkt aa_1 (A) die Geraden r und r_1 als Träger der Punktreihen ABC p. abc, $AB_1 C_1$

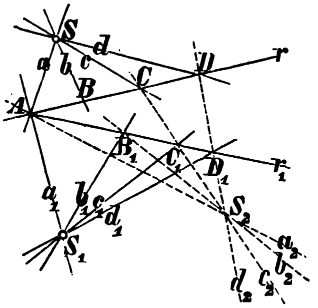


Fig. 74.

p. $a_1 b_1 c_1$. Nun ist ABC p. $AB_1 C_1$ (S. 53, § 18, 2), und der Strahlpunkt S_2 ergibt einen zu abc und $a_1 b_1 c_1$ bestrahlt liegenden Büschel $a_2 b_2 c_2$, so daß zu einem Strahl d leicht d_2 und dann d_1 zu finden ist.

2′. Die Träger r und r_1 können auch nach a_1 und a (Fig. 76) verlegt werden. Dann wird die Verbindungsgerade (fe_1) der Scheitel SS_1 vom Strahlpunkt S_2 in f_1 und e abge-



Strahlpunkt A_1 nach F_1 abgebildet; d. h. die Bildachse $B_2 C_2$ schneidet die Träger in den Punkten, die dem Schnittpunkt $E_1 F$ entsprechen. Die diesem Schnittpunkt entsprechenden Punkte (E und F_1) sind aber durch die Lage der drei Punktpaare ABC und $A_1 B_1 C_1$ eindeutig bestimmt (S, 55, § 18, 5 b). Die Bildachse muß daher auch durch E und F_1 gehen, wenn die Scheitel von A und A_1 nach B und B_1 verlegt werden; somit liegt auch der Schnittpunkt von $B_1 C$ und $B C_1$ auf dieser Geraden. Also:

bildet; d. h. der Strahlpunkt S_2 ist der Schnittpunkt der Bilder f_1 und e, die dem Scheitelstrahl entsprechen. Die diesem Scheitelstrahl entsprechenden Strahlen (e und f_1) sind aber durch die Lage der drei Strahlenpaare abc und $a_1 b_1 c_1$ eindeutig bestimmt (S. 56, § 19, 5 a). Wenn daher die Träger von a und a_1 nach b und b_1 verlegt werden, so muß der Strahlpunkt doch wieder der Schnittpunkt von e und f_1, d. h. S_2 sein; somit geht auch die Verbindungsgerade der Schnittpunkte $b_1 c$ und $b c_1$ durch diesen Punkt. Also:

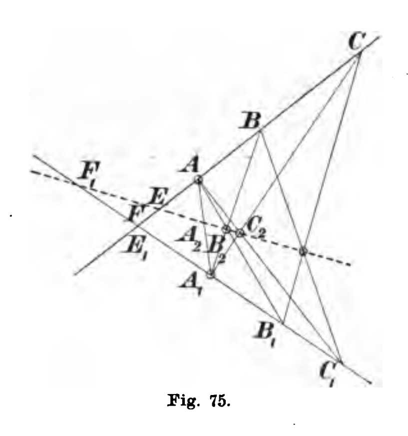


Fig. 75.

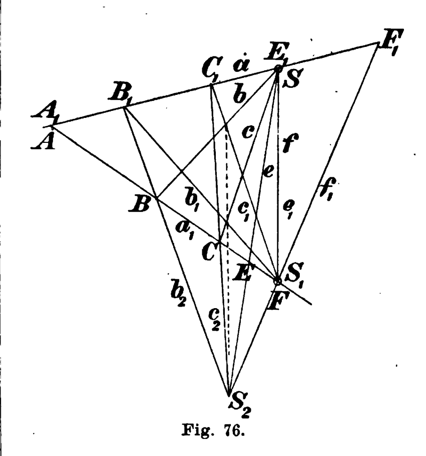


Fig. 76.

Wenn man in einer Punktreihe und ihrem nicht von ihr bestrahlten Bild je einen Punkt A der einen Reihe mit einem nicht entsprechenden Punkt B_1 der andern Reihe verbindet und ebenso deren Bilder $A_1 B$, so schneiden einander beide Verbindungsgeraden stets auf einer Geraden; diese geht durch die Bilder des Schnittpunkts beider Träger der Punktreihen.

Wenn man in einem Strahlenbüschel und seinem Bild in nicht bestrahlter Lage den Schnittpunkt je eines Strahles a des einen Büschels und eines nicht entsprechenden Strahles b_1 des andern Büschels verbindet mit dem Schnittpunkt ihrer Bilder $a_1 b$, so geht diese Verbindungsgerade stets durch einen Punkt; dieser ist der Schnittpunkt der Bilder des Scheitelstrahls beider Strahlenbüschel.

Die Punkte $ABCA_1 B_1 C_1$ bestimmen einen geschlossenen Geradenzug (Sechseck) $AB_1 CA_1 BC_1 A$, dessen

Die Geraden abc $a_1 b_1 c_1$ bestimmen einen geschlossenen Geradenzug (Sechsseit) $ab_1 ca_1 bc_1 a$, dessen Seiten ab-



Ecken abwechselnd auf zwei Geraden liegen; in einem solchen schneiden also die Gegenseiten einander in drei Punkten einer Geraden (Pascalsches Sechseck).

3. In der vorigen Aufgabe können wir auch, wenn durch entsprechende Punktpaare die Verbindungsgeraden AA_1, BB_1, CC_1 gelegt sind, die Schnittpunkte zweier derselben mit der dritten, z. B. S und S_1, als Scheitel der beiden, die Punktreihen ABC und $A_1B_1C_1$ bestrahlenden Büschel annehmen, so daß nun die Verbindungsgerade von bb_1 (B) mit cc_1 (C_1) sich als Achse x ergibt. Dann wird das Bild des Punktes D erhalten, indem man den Schnittpunkt des Strahles SD und der Achse x verbindet mit S_1; die Verbindungsgerade S_1D_1 oder d_1 gibt dann D_1.

Bezeichnen wir DD_1 mit d_2, so ist $ab_1rd_2r_1c$ $(SS_1BDD_1C_1)$ ein Brianchonsches Sechsseit. Wir folgern also:

a) *Die Träger einer Punktreihe und ihres Bildes bestimmen mit vier Verbindungsgeraden entsprechender Punkte ein Sechsseit, in welchem die Verbindungsgeraden der Gegenecken durch einen Punkt gehen (Brianchonsches Sechsseit)* —

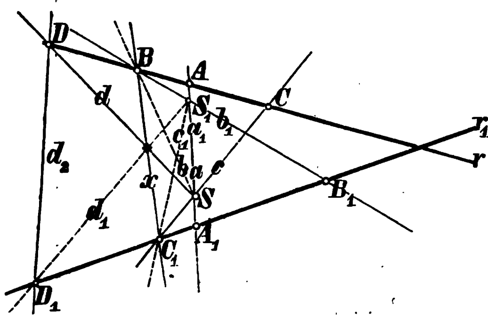


Fig. 77.

wechselnd durch zwei Punkte gehen; in einem solchen gehen also die Verbindungsgeraden der Gegenecken durch einen Punkt (Brianchonsches Sechsseit).

3′. In der vorigen Aufgabe können wir auch, wenn von entsprechenden Strahlenpaaren die Schnittpunkte aa_1, bb_1, cc_1 bestimmt sind, die Verbindungsgeraden zweier derselben mit dem dritten, z. B. r und r_1, als Träger der beiden von abc und $a_1b_1c_1$ bestrahlten Punktreihen annehmen, so daß nun der Schnittpunkt von BB_1 (b) und CC_1 (c_1) sich als Scheitel X ergibt. Dann wird das Bild des Strahles d erhalten, indem man den Schnittpunkt rd oder D mit dem Strahlpunkt X verbindet; dieser Strahl gibt D_1 auf r_1 und dadurch S_1D_1 oder d_1.

Bezeichnen wir dd_1 mit D_2, so ist $AB_1SD_2S_1C$ ein Pascalsches Sechseck. Wir folgern also:

a′) *Die Scheitel eines Strahlenbüschels und seines Bildes bestimmen mit vier Schnittpunkten entsprechender Strahlen ein Sechseck, in welchem die Gegenseiten einander in drei Punkten einer Geraden schneiden (Pascalsches Sechseck)* —

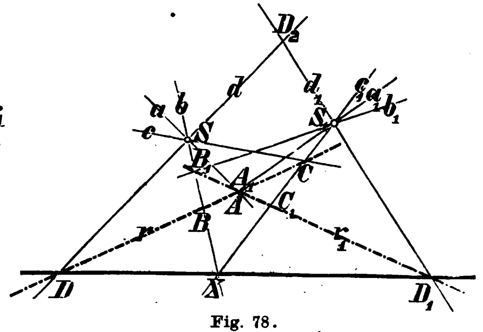
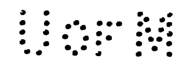


Fig. 78.


UofM

und umgekehrt folgt:

b) *In einem Brianchonschen Sechsseit stellen die Schnittpunkte von vier Seiten mit den beiden übrigen Seiten eine Punktreihe und ihr Bild dar.*

b′) *In einem Pascalschen Sechseck stellen die Verbindungsgeraden von vier Ecken mit den beiden übrigen Ecken einen Strahlenbüschel und sein Bild dar.*

4. Auch die Punkte und Berührenden des Kreises führen auf Strahlenbüschel und Punktreihen mit ihren Bildern. Nach I. Teil, § 29, 6 Zus. a′ können zwei Punkte der Kreislinie als Scheitel übereinstimmender gleichwendiger Strahlenbüschel gewählt werden, deren entsprechende Strahlen einander auf der Kreislinie schneiden. Übereinstimmende Strahlenbüschel können aber natürlich als Vorlage und Bild aufgefaßt werden. — Wählen wir nun zwei Berührende g und g_1 als Träger zweier Punktreihen, deren entsprechende Punkte AA_1, BB_1 je auf einer Berührenden a, b des Kreises liegen, und sind E und F_1, A_2, B_2 . . . die Berührungspunkte von g, g_1, a, b, . . ., so ist der Strahlenbüschel $E\ (A_2 B_2 \ldots) \barwedge F_1\ (A_2 B_2 \ldots)$; ferner ist $E\ (A_2 B_2 \ldots) \barwedge M\ (AB \ldots)$, da ihre Strahlen paarweise aufeinander senkrecht, $EA_2 \perp MA$, also die Büschel übereinstimmend sind. Aus demselben Grund ist $F_1(A_2 B_2 \ldots) \barwedge M\ (A_1 B_1 \ldots)$, somit schließlich auch $M(AB \ldots) \barwedge M\ (A_1 B_1)$ und hiermit $AB \ldots \barwedge A_1 B_1 \ldots$ Also:

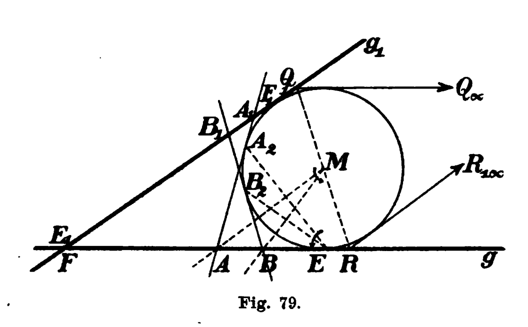


Fig. 79.

Die Strahlen von zwei Punkten eines Kreises nach beliebigen Punkten desselben bilden zwei Strahlenbüschel, die einander als Vorlage und Bild entsprechen. — Der Berührenden eines Scheitels entspricht der Scheitelstrahl.

Die Schnittpunkte zweier Berührenden eines Kreises mit beliebigen andern Berührenden desselben bilden zwei Punktreihen, die einander als Vorlage und Bild entsprechen. — Dem Berührungspunkt eines Trägers entspricht der Schnittpunkt der beiden Träger.

5. Auch aus diesen Sätzen (in Verbindung mit 3 a′ und 3 a) folgen die Sätze von Pascal und Brianchon als für den Kreis gültig.

Sechstes Kapitel.

Abbildung beliebiger Figuren mit einer Bildachse.

§ 21. Abbildung geradliniger Figuren mit einer Bildachse.

1. *Je zwei Punkte auf drei Strahlen eines Punktes* (AA_1, BB_1, CC_1) *bestimmen zwei Dreiecke* (ABC *und* $A_1B_1C_1$), *deren Seiten einander paarweise auf einer Geraden schneiden* ($S_1S_2S_3$).

1'. *Je zwei Strahlen von drei Punkten einer Geraden* (aa_1, bb_1, cc_1) *bestimmen zwei Dreiseite* (abc *und* $a_1b_1c_1$), *deren Ecken paarweise auf drei Strahlen eines Punktes* (S) *liegen.*

(Sätze von Desargues 1648).

Zum Beweis des ersten Satzes (Fig. 80) folgt nach dem Satz von Menelaos (S. 40, § 14, 1 b) für

$\triangle ABS$ mit der Geraden $A_1B_1S_3$: $\quad \frac{AS_3}{S_3B}\cdot\frac{BB_1}{B_1S}\cdot\frac{SA_1}{A_1A} = -1$

$\triangle BCS$ „ „ „ $B_1C_1S_1$: $\quad \frac{BS_1}{S_1C}\cdot\frac{CC_1}{C_1S}\cdot\frac{SB_1}{B_1B} = -1$

$\triangle CAS$ „ „ „ $C_1A_1S_2$: $\quad \frac{CS_2}{S_2A}\cdot\frac{AA_1}{A_1S}\cdot\frac{SC_1}{C_1C} = -1.$

Das Produkt dieser Gleichungen:

$$\frac{AS_3}{S_3B}\cdot\frac{BS_1}{S_1C}\cdot\frac{CS_2}{S_2A} = -1$$

ergibt (§ 14, 2), daß auf den Seiten des $\triangle ABC$ die Punkte $S_1S_2S_3$ einer Geraden s angehören.

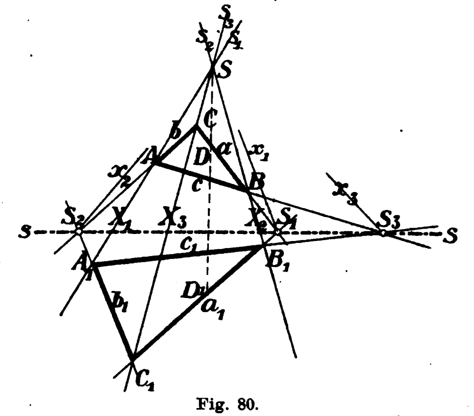


Fig. 80.

Der zweite Satz ergibt sich aus dem ersten: Die Ecken der Dreiecke AS_2A_1 und BS_1B_1 liegen nämlich auf drei Strahlen von S_3 (csc_1) so, daß (wenn S als Schnittpunkt von AA_1 und BB_1 aufgefaßt wird) die Schnittpunkte CC_1S der drei Seitenpaare dieser Dreiecke, wie eben bewiesen, auf einer Geraden liegen müssen, d. h. auch CC_1 geht durch S.

Die Sätze 1 und 1' lassen sich auch durch Anwendung der Sätze über Punktreihen (S. 55, § 18, 5 c) und Strahlenbüschel (S. 57, § 19, 5 b) beweisen.

Wird nämlich die Gerade S_1S_2 von den drei Strahlen nach ABC in $X_1X_2X_3$ geschnitten, so wird von der Punktreihe SCX_3C_1 ein Bild

Wenn nämlich von $S_1S_2S_3$ nach S (dem Schnittpunkt von AA_1 und BB_1) die Strahlen $x_1x_2x_3$ gezogen werden, so wird von dem Büschel



einerseits vom Strahlpunkt S_2 nach SAX_1A_1 entworfen und andererseits vom Strahlpunkt S_1 ein zweites Bild nach SBX_2B_1. Da diese beiden Punktreihen den gemeinsamen Punkt S haben, so liegen sie in einem Strahlenbüschel. AB, X_1X_2 und A_1B_1 gehen durch einen Punkt, d. h. c und c_1 schneiden sich ebenfalls auf S_1S_2.

S_3 (x_3csc_1) an der Achse SBX_2B_1 das Bild S_1 (x_1asa_1) entworfen und an der Achse SAX_1A_1 das Bild S_2 (x_2bsb_1). Da beide Bilder den Strahl s gemeinsam haben, so liegen sie beide an einer Punktreihe oder Bildachse (SCX_3C_1), d. h. C und C_1 sind Punkte eines Strahles von S.

2. Man zeichnet zu einer Figur in einer Ebene ein bestrahltes oder perspektives (p.) Bild, indem man 1) von einem Punkt, dem Strahlpunkt S, Strahlen durch die Punkte der Figur zieht, dann 2) einen Punkt A der Figur mit ihren übrigen Punkten B, C... durch Gerade AB, AC... verbindet und deren Schnittpunkte bestimmt mit einer beliebigen Geraden s, der Bildachse $(ABS_3$, $ACS_2)$, 3) auf dem Strahl SA einen beliebigen Punkt A_1 als Bild von A annimmt und durch ihn die Geraden nach jenen Achsenschnittpunkten S_3, S_2 zieht. Das Bild B_1 eines Punktes B ist dann der Schnittpunkt des Strahles SB mit der durch ABS_3 bestimmten Geraden A_1S_3; ebenso liegt das Bild C_1 des Punktes C auf A_1S_2.

Von 2 Figuren heißt also jede das bestrahlte Bild der andern (oder jede perspektiv zur andern), wenn ze 2 entsprechende Punkte beider Figuren auf einem Strahl eines Büschels liegen und wenn die Verbindungsgeraden eines Punktes mit jedem andern Punkt der Figur jeweils die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte in den Punkten einer Geraden schneiden.

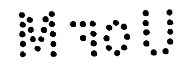
Wenn zwei Figuren in eine solche Lage gebracht werden können, daß für ihre Punkte diese Bedingungen erfüllt sind, so werden sie als gegenseitig bestrahlbar oder projektiv ($\barwedge$) bezeichnet — oder auch: eine Figur heißt kurzweg ein Bild der andern.

3. Da dann von den Dreiecken $A_1B_1C_1$ und ABC die Ecken paarweise auf 3 Strahlen des Punktes S liegen und die Seitenpaare AB und A_1B_1, AC und A_1C_1 einander auf der Geraden S_3S_2 schneiden, so muß nun (nach 1) auch der Schnittpunkt S_1 von BC und B_1C_1 auf dieser Geraden, auf der Bildachse, liegen. Also:

Die Verbindungsgerade irgend zweier Punkte einer Figur schneidet die der Bilder dieser Punkte in bestrahlter Lage auf der Bildachse (oder beide Gerade sind der Bildachse parallel).

4. Für jeden weiteren Punkt D auf BC fällt die Verbindungsgerade BD auf die Gerade BCS_1; somit fällt (nach 3) die Verbindungsgerade der Bildpunkte B_1D_1 auf die Gerade B_1S_1; die Bilder der Punkte von BC liegen auf der Geraden B_1C_1. Also:

a) *Die Bilder der Punkte einer Geraden liegen auf einer Geraden.*



Hieraus folgt für die Gerade selbst:

b) *Das Bild einer Geraden ist eine Gerade und zwar ist diese α) die Verbindungsgerade der Bilder zweier Punkte der Geraden, oder β) bei Bestrahlung die Gerade von einem Bildpunkt der ersteren Geraden nach ihrem Achsenschnittpunkt.*

5. Gehört ein Punkt C zwei Geraden AC und BC an, so gehört sein Bild C_1 ihren Bildern A_1C_1 und B_1C_1 an:

Das Bild des Schnittpunktes zweier Geraden ist der Schnittpunkt der Bilder der Geraden.

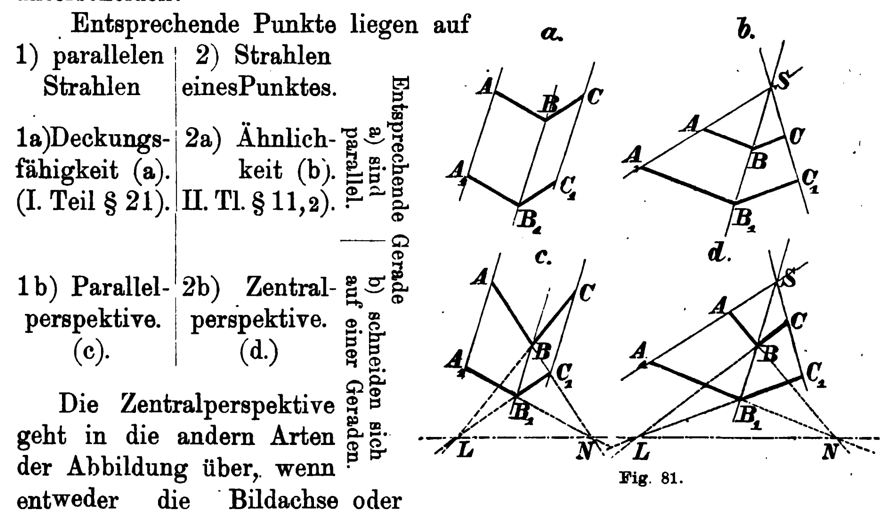
Die beiden Schnittpunkte liegen also auf einem Strahl des Strahlpunktes, womit wieder der Satz 1′ bewiesen ist.

6. Man kann nun die Zeichnung nicht nur, wie in 2 angegeben durch die Verbindungsgeraden von einem bestimmten Punkt A und durch die entsprechenden Geraden von A_1, sondern ebensowohl auch von einem so erhaltenen Punktpaar B und B_1 ausführen, oder auch von Punktpaar zu Punktpaar weiter führen.

Geht man von zwei entsprechenden Punktpaaren AA_1 und BB_1 zugleich aus, und zieht man nach jedem weiteren Punkt C die Geraden ACS_2 und BCS_1 und hierzu A_1S_2 und B_1S_1, so erhält man in deren Schnittpunkt (nach 5) den Bildpunkt C_1, ohne den Strahlpunkt zu benutzen.

7. Jeder Punkt der Bildachse ist sein eigenes Bild. Wird der Strahlpunkt S selbst als ein Punkt der Vorlage aufgefaßt, so ist er sein eigenes Bild; ebenso entsprechen einander die Strahlstrecken eines Strahles SA und SA_1.

8. Wir können vier Arten der Abbildung durch Bestrahlung unterscheiden:



Entsprechende Punkte liegen auf

1) parallelen Strahlen	2) Strahlen eines Punktes.	Entsprechende Gerade
1a) Deckungsfähigkeit (a). (I. Teil § 21).	2a) Ähnlichkeit (b). II. Tl. § 11,2).	a) sind parallel.
1b) Parallelperspektive. (c).	2b) Zentralperspektive. (d.)	b) schneiden sich auf einer Geraden.

Fig. 81.

Die Zentralperspektive geht in die andern Arten der Abbildung über, wenn entweder die Bildachse oder der Strahlpunkt oder beide in unendliche Ferne hinausrücken.

9. Auf die Parallelperspektive lassen sich obige Bestimmungen und Sätze in 2—7 sofort übertragen. Nur der Beweis von 3 wird hier (statt mit 1) gemäß § 11, 11, (S. 32) geführt: ist $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, so schneiden einander die Seiten von $\triangle ABC$ und $A_1B_1C_1$ auf einer Geraden.

§ 22. Fluchtpunkte und Fluchtgerade.

1. Jedem Punkt einer Geraden a entspricht als Bild ein Punkt des Bildes der Geraden a_1; nur für den Punkt A' auf dem Strahl $SA' \parallel a_1$ ist auf a_1 kein Punkt in endlicher Entfernung anzugeben, sondern nur auszusagen, daß die Bilder der Punkte von a auf der Geraden a_1 in um so größere Entfernung fallen, je näher erstere dem Punkte A' rücken (S. 43, § 15, 1). Deshalb heißt A' das Bild des unendlich fernen Punktes von a_1, oder A' heißt der ***Fluchtpunkt*** zu a_1 auf a.

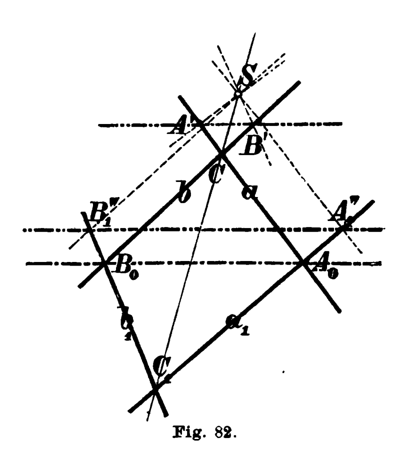


Fig. 82.

Ist ebenso B' der Fluchtpunkt zu b_1 auf b, sind ferner C und C_1 die Schnittpunkte der Geradenpaare ab und a_1b_1, A_0 und B_0 die Achsenpunkte derselben, so ist (S. 29, § 11, 2) $\triangle SA'B'$ p. ä. $C_1A_0B_0$ zu C als Ähnlichkeitspunkt. Daher ist auch (S. 30, § 11, 4 a) $A'B' \parallel B_0A_0$, d. h. der zweite Fluchtpunkt B' liegt auf der Geraden, welche durch den ersten Fluchtpunkt A' parallel zur Achse gezogen ist; daraus folgt:

Die Fluchtpunkte zu allen Geraden einer Figur liegen im Bild auf einer Geraden, die parallel zur Achse ist.

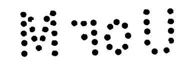
Diese Gerade heißt die ***Fluchtgerade*** der Figur oder auch das Bild der unendlich fernen Geraden der andern Figur, da ihr die Bilder der Geraden dieser Figur um so näher kommen, je weiter diese Geraden mit allen ihren Punkten parallel zur Achse hinausrücken.

Ebenso ergibt sich die Fluchtgerade $A_1''B_1''$, welche der Figur a_1b_1 angehört und die Fluchtpunkte zu den Geraden a und b enthält.

2. Zu parallelen Geraden der einen Figur (Fig. 83) $c_1 \parallel a_1$ gehört in der andern Figur nur ein Fluchtpunkt A', da $SA' \parallel a_1 \parallel c_1$; statt „Fluchtpunkt zu einer Geraden" sagt man daher auch „Fluchtpunkt zu einer Richtung".

a) *Parallele Gerade* (a_1c_1) *werden als solche* (ac) *abgebildet, die einander auf der Fluchtgeraden im Fluchtpunkt schneiden.*

Umgekehrt:



b) *Die Bilder zweier Geraden* (bd), *die einander auf der Fluchtgeraden (in* B'*) schneiden, sind parallel* $(b_1 \parallel d_1)$.
nämlich parallel zu SB'.

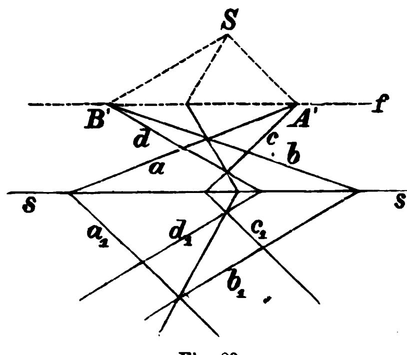


Fig. 83.

3. Wenn der Strahlpunkt S (Fig. 82), die Fluchtgerade $A'B'$ und ein Paar entsprechender Punkte C und C_1 gegeben sind, so erhält man zu einer Geraden $A'C$ das Bild, indem man durch C_1 die Gerade $C_1A_0 \parallel SA'$ zieht. Durch den Schnittpunkt A_0 der Geraden A_1C und C_1A_0 erhält man die Achse $A_0B_0 \parallel A'B'$. Ebenso läßt sich S bestimmen, wenn ein Achsenpunkt A_0, die Fluchtgerade $A'B'$ und ein Paar entsprechender Punkte gegeben sind.

Ist der Strahlpunkt S (Fig. 83), die Achse s und die Fluchtgerade $f \parallel s$ gegeben, so erhält man zu einer Geraden a das Bild, indem man durch den Achsenschnittpunkt as die Gerade $a_1 \parallel SA'$ zieht. Zu einer Geraden b_1 erhält man das Bild, indem man $SB' \parallel b_1$ zieht und dann den Achsenschnittpunkt b_1s mit B' verbindet.

4. Nach 2b lassen sich nun Eigenschaften einer Figur nachweisen, indem man ein solches Bild von ihr ins Auge faßt, in dem alle Strahlen von Punkten einer beliebigen Geraden als Parallelstrahlen erscheinen.

Betrachten wir z. B. in einem vollständigen Viereck zwei Nebenecken als Fluchtpunkte, oder in einem vollständigen Vierseit $abcd$ (Fig. 83) eine Nebenseite $A'B'$ als Fluchtgerade, so ist das Bild des Vierseits ein Parallelogramm $a_1b_1c_1d_1$. Da in diesem die Eckenlinien einander halbieren, so ergeben sich nun wieder aus § 15,2 (S. 44) die Sätze vom Viereck und Vierseit des § 16. (Vgl. auch § 23,6).

§ 23. Der Kreis als Bild des Kreises mit Bildachse. Das Sechseck und Sechsseit des Kreises.

A. Potenzgerade und Ähnlichkeitspolaren.

1. (Fig. 84). Von dem Ähnlichkeitspunkt S zweier Kreise M und M_1 treffe ein Strahl SAA_1 die Kreise in den beiden nicht ähnlich (sondern invers) liegenden Punkten A und A_1, während C das Bild zu A_1 in

der ähnlichen Abbildung sei; ebenso liege B_1 bestrahlt von B, dagegen D ähnlich zu B_1. Dann ist CD p. ä. $A_1 B_1$, also auch

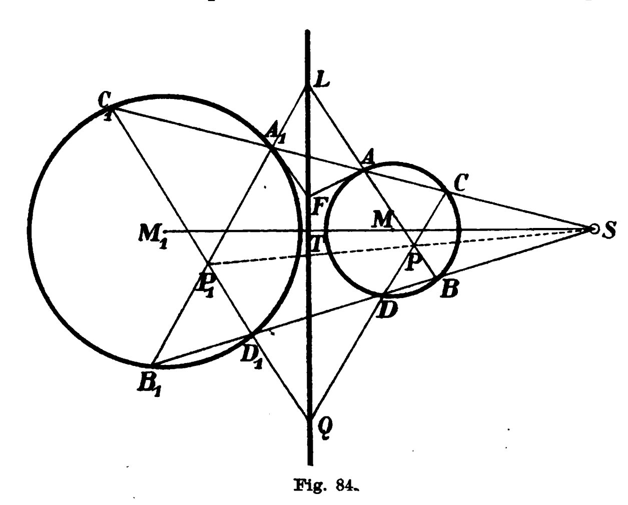


Fig. 84.

$CD \parallel A_1 B_1$, und wegen der Gleichheit der Winkel $CAB = CDB = A_1 B_1 S$ liegt $\triangle\ SAB$ gewendet ähnlich zu $SA_1 B_1$, somit ist $SA \cdot SA_1 = SB \cdot SB_1$ (S. 23, § 8,1). Hieraus folgt (S. 25, § 9,3), daß durch ABB_1A_1 ein Kreis gelegt werden kann. Deshalb ist auch für L als Schnittpunkt von AB und $A_1 B_1$

$$LA_1 \cdot LB_1 = LA \cdot LB,$$

d. h. L ist ein Punkt gleicher Potenz für die Kreise M und M_1; somit (§ 9,7) liegt er auf der Potenzgeraden LT beider Kreise. Die nicht ähnlich liegenden Schnittpunkte der A.-Strahlen mit den beiden Kreisen entsprechen also der Lage der Punkte einer Figur und ihres Bildes mit S als Strahlpunkt und LT als Bildachse (S. 62, § 21,2 u. 3).

Ein Kreis ist Bild eines Kreises zu einem Ähnlichkeitspunkt als Strahlpunkt und zur Potenzgeraden beider Kreise als Bildachse, wobei die nicht ähnlich (also invers) liegenden Punkte eines Strahles einander entsprechen.

Rücken die Punkte B und B_1 des zweiten Strahles SBB_1 denen des ersten AA_1 immer näher, so gehen schließlich die Sehnen AB und $A_1 B_1$ in die Berührenden in A und A_1 über; diese schneiden sich daher auch auf der Bildachse, und es ist $FA = FA_1$.

2. Die Geraden AB und CD (Fig. 84) schneiden einander in P, ihre Bilder $A_1 B_1$ und $C_1 D_1$ in P_1, so daß P und P_1 als Vorlage und Bild einander entsprechen (S. 63, § 21,5); sie liegen aber auch ähnlich auf einem Strahl von S als Schnittpunkte ähnlich liegender Geraden (S. 30, § 11,5): $A_1 B_1$ p. ä. CD, $C_1 D_1$ p. ä. AB. Beide Punkte sind

auch Punkte der Polaren zum Ähnlichkeitspunkt in beiden Kreisen (S. 50, § 17,4), und da diese Ähnlichkeits-Polaren parallel zur Bildachse sind, so gilt für sie:

Die Polaren des Ä.-Punktes entsprechen einander sowohl bei der ähnlichen Abbildung der Kreise, als auch bei der Abbildung mit einer Bildachse.

3. Wählt man (Fig. 85) die beiden Strahlen SAA_1 und SBB_1 beiderseits gleichliegend zur Mittellinie SMM_1, so ergeben sich als Schnittpunkte P und P_1 der Sehnen AB, CD und A_1B_1, C_1D_1 die zu S in beiden Kreisen zugeordneten Pole (S. 50, § 17,4). Da die Geraden durch P und P_1 paarweise ähnlich liegen und auch paarweise beiderseits gleich zu PP_1, so stimmen alle Winkel, die sie mit PP_1 machen, überein, so daß auch $\sphericalangle P_1PL = LP_1P$. Daher ist $\triangle LPP_1$ gleichschenkelig mit LT als Mittellinie, woraus folgt:

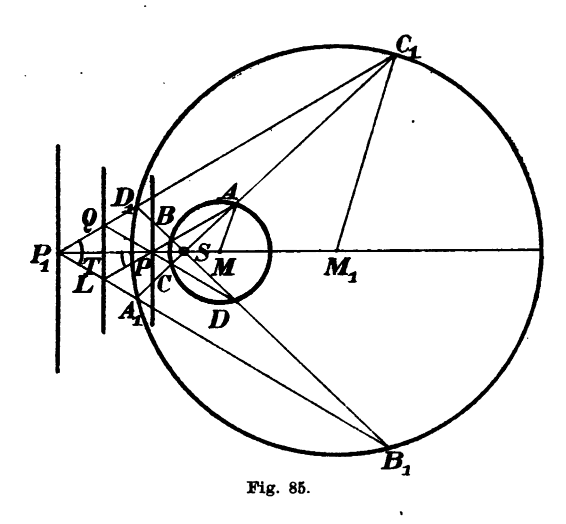


Fig. 85.

Die Potenzgerade (Bildachse) zweier Kreise ist die Mittelparallele der Ähnlichkeitspolaren.

B. Die Fluchtgerade. Sätze von Pascal und Brianchon.

4. Sind P und P_1 (Fig. 86) die zu S zugeordneten Pole und zieht man zu PC den parallelen Strahl SF_1, so trifft dieser das Bild P_1C_1 der Geraden PC im Fluchtpunkt F_1. Da nun $\sphericalangle F_1SP = CPP_1 = SP_1C_1$ ist (3), so ist $SF_1 = F_1P_1$, und die Fluchtgerade F_1G_1 ist Mittelsenkrechte zu SP_1.

a) *Die Fluchtgerade eines Kreises (bei dessen Abbildung als Kreis) halbiert den Abstand zwischen dem Ä.-Punkt und seiner Polare in dem Kreis.*

Der Pol M_1 der Fluchtgeraden F_1G_1 teilt mit dieser den Durchmesser A_1B_1 harmonisch. Da im Bild der Punkt G_1 der Fluchtgeraden in unendliche Ferne fällt, so ist das Bild von M_1 die Mitte O von AB (S. 44, § 15,2b).

b) *Das Bild des Poles der Fluchtgeraden (bei der Abbildung des Kreises als Kreis) ist Mittelpunkt des Bildkreises.*

Da G_1 die Mitte der Strecke SP_1 ist, die durch A_1B_1 harmonisch

geteilt wird, so ist (S. 21, § 7,4) $\overline{SG_1}^2 = G_1A_1 \cdot G_1B_1 = \overline{G_1T_1}^2$,
also: $SG_1 = G_1T_1$. Somit gilt:

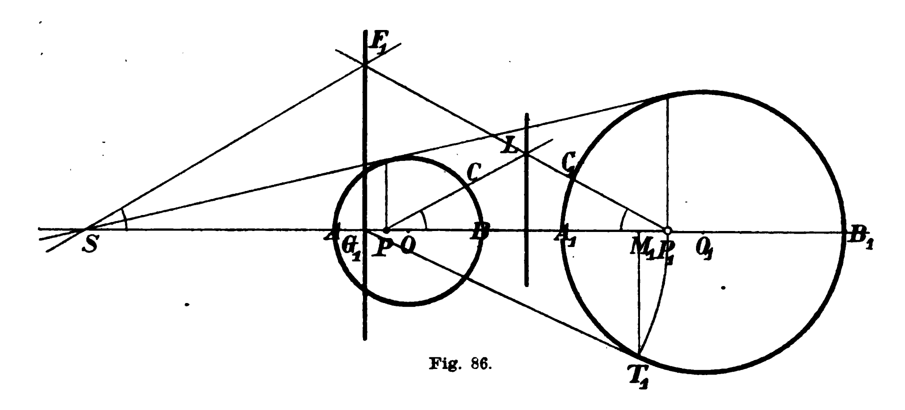


Fig. 86.

c) *Die Senkrechte vom Strahlpunkt zur Fluchtgeraden eines Kreises (bei dessen Abbildung als Kreis) ist gleich der Berührenden von ihrem Fußpunkt an den Kreis.*

5. a) Wenn der Strahlpunkt S zur Abbildung des Kreises um O_1 willkürlich gewählt ist, so ist hiernach die Fluchtgerade F_1G_1 bestimmt, und ebenso ist der Punkt M_1 bestimmt, dessen Bild der Mittelpunkt des Bildkreises ist; jeder Kreis, der für S als Ä.-Punkt zu dem Kreis um O_1 ähnlich liegt, kann als ein Bild des Kreises O_1 gelten, für das F_1G_1 und M_1 ihre Bedeutung beibehalten.

Man kann nun aber zur Abbildung des Kreises O_1 auch eine beliebige äußere Gerade F_1G_1 als Fluchtgerade oder einen beliebigen inneren Punkt M_1 als Vorlage des Mittelpunktes des Bildes wählen und hierauf S bestimmen. Ist z. B. M_1 gewählt, so zeichnet man hierzu die Polare F_1G_1, zieht $M_1G_1 \perp F_1G_1$ und trägt auf der Geraden M_1G_1 die Berührende G_1T_1 nach G_1S ab; man erhält so den Strahlpunkt.

Ein Kreis läßt sich so als Kreis abbilden, daß

das Bild eines gegebenen Punktes innerhalb des Kreisumfangs Mittelpunkt wird. Das Bild der Polare jenes Punktes fällt dann in unendliche Entfernung.	*das Bild einer gegebenen Geraden außerhalb des Kreises in unendliche Entfernung fällt. Das Bild des Poles der Geraden fällt dann in den Mittelpunkt des Kreises.*

b) Der Strahlpunkt S kann auch durch folgende Zeichnung erhalten werden. Ist P (Fig. 87) der gegebene Punkt, so zeichne man den Durchmesser APB und die zu ihm senkrechte Sehne CPD und bestimme zu dem vollständigen Viereck $ACBD$ die Nebenecken L und N; dann ergibt sich leicht

$$\overline{LQ}^2 = \overline{QN}^2 = QA \cdot QB$$

(da $LQ : PD = QA : AP$, $LQ : CP = QB : PB$ und $CP \cdot PD = AP \cdot PB$ ist); daher macht man $QS = QN$. Vom Strahlpunkt S aus wird das Bild des Vierecks $ACBD$ ein Quadrat, da $B_1C_1 \| SL \| D_1A_1$, $B_1D_1 \| SN \| C_1A_1$ und da LSN ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck ist.

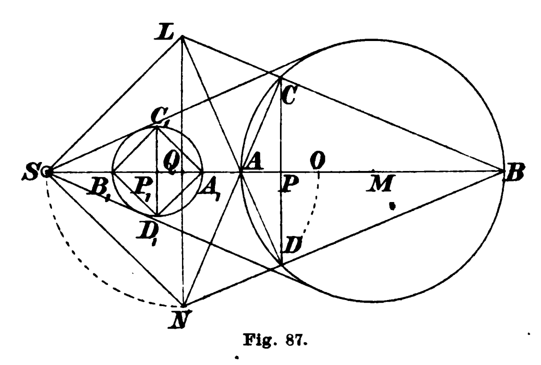


Fig. 87.

6. Mit Hilfe der Sätze in 5 lassen sich Beziehungen der Lage von Punkten und Geraden im Kreis ermitteln, indem man die betreffenden Eigenschaften zuerst an Kreisbildern mit einfacheren Beziehungen aufsucht und sie dann auf die Figur der Vorlage überträgt. So kann der

Satz von Pascal:

Bei einem Sehnensechseck liegen die drei Schnittpunkte der Gegenseiten in einer Geraden,

Satz von Brianchon:

Bei einem berührenden Sechsseit gehen die drei Verbindungsgeraden der Gegenecken durch einen Punkt,

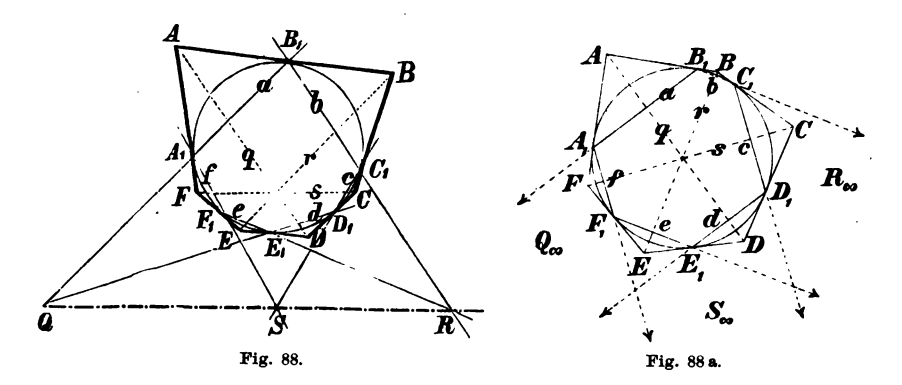


Fig. 88. Fig. 88 a.

bewiesen werden, indem man die Figur (Fig. 88) so abbildet, daß das Bild des Kreises wieder ein Kreis wird (Fig. 88a) und zugleich im Bild der Schnittpunkt ad oder Q und be oder R in unendliche Entfernung hinaus rückt. Dann wird

$$\sphericalangle\, ab = ed$$

und Bogen

$$C_1D_1E_1F_1A_1 = F_1A_1B_1C_1D_1,$$

woraus folgt:

Bogen $A_1B_1C_1 = D_1E_1F_1$, $A_1F_1 \| C_1D_1$

der Schnittpunkt qr Mittelpunkt wird. Dann werden $a \| d$, $b \| e$, da sie senkrecht zu den Durchmessern q und r sind, woraus, wie eben bewiesen, folgt $c \| f$. Die vom Mittelpunkt nach C und F gezogenen Geraden stehen dann senkrecht auf c und f und bilden somit eine einzige Gerade s durch den

(I. Teil, § 28,2). Daher liegt in der Vorlage der Schnittpunkt cf oder S auf der Fluchtgeraden QR. | Mittelpunkt. Daher geht auch in der Vorlage s durch den Schnittpunkt qr.

7. Aus den Sätzen von Pascal und Brianchon gehen weitere Beziehungen der Lage hervor, wenn man ein Paar aufeinander folgender Stücke der Figur (d. h. Ecken des Sehnensechsecks oder Seiten des berührenden Sechsseits) zusammenfallen läßt, wobei einerseits die Schneidende in eine Berührende und anderseits der Schnittpunkt der Berührenden in den Berührungspunkt übergeht (s. I. Teil § 27,3 und § 29,7 Zusatz). So z. B. ergibt sich die Lösung der beiden Aufgaben:

mit dem Lineal allein in einem Punkt eines Kreises die Berührende zu zeichnen. | *mit dem Lineal allein auf einer Berührenden eines Kreises den Berührungspunkt zu bestimmen.*

Nachfolgende Figuren geben die Lösung durch die Reihenfolge der Zahlen an, wobei das gegebene Stück mit 2 aufeinander folgenden Zahlen (hier mit 3, 4) bezeichnet ist.

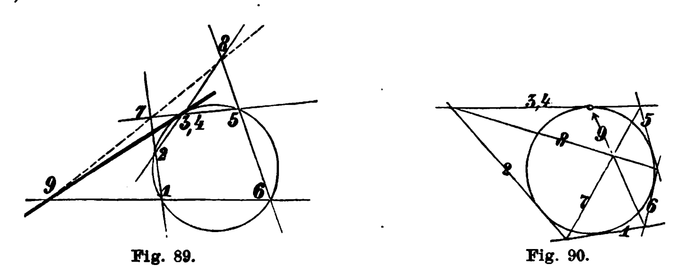


Fig. 89. Fig. 90.

C. Drei Kreise mit Potenzzentrum und Berührungskreisen.

8. Die Bildachse x (Fig. 91) der beiden Kreise K_1 und K_2 schneide die Bildachse y zu dem ersteren und einem dritten Kreise K_3 in V;

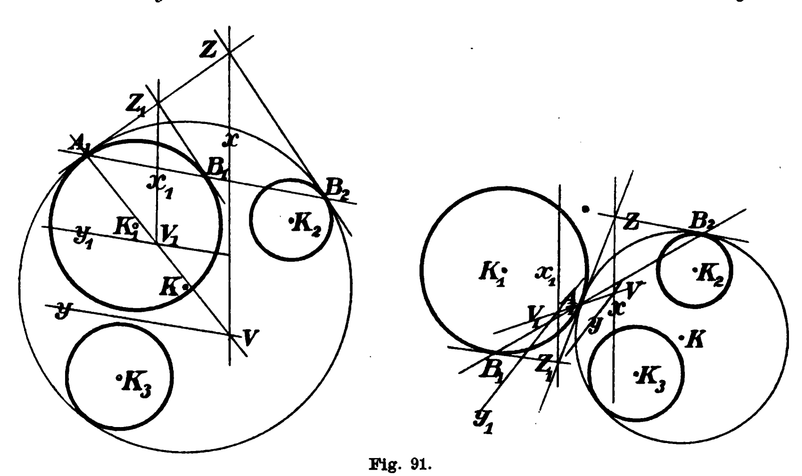


Fig. 91.

dann hat dieser Punkt sowohl für K_1 und K_2, als für K_1 und K_3 die gleiche Potenz, somit auch für K_2 und K_3, d. h. der Punkt liegt auch auf der Bildachse der letzteren Kreise.

Die drei Bildachsen (Potenzgeraden) dreier Kreise gehen durch einen Punkt (das Potenzzentrum).

Zusätze: a) Wenn drei Kreise einander in je zwei Punkten schneiden, so gehen die drei Verbindungsgeraden der Schnittpunkte je zweier Kreise durch einen Punkt, das Potenzzentrum.

b) Wenn drei Kreise einander paarweise berühren, so gehen die drei gemeinsamen Berührenden durch einen Punkt.

9. Wenn (Fig. 91) zwei Kreise K_1 und K_2 von einem dritten K berührt werden, so entspricht ein Berührungspunkt A_1 dem andern B_2 als nicht ähnlich liegendes Bild (S. 35, § 12,5); ihre Berührenden schneiden einander in Z auf der Bildachse der beiden ersten Kreise. Für die beiden Kreise K_1 und K ist A_1 Ähnlichkeitspunkt; B_1 und B_2 sind ähnlich liegende Punkte, daher auch die Schnittpunkte Z_1 und Z der Berührenden in diesen Punkten mit dem Ähnlichkeitsstrahl $A_1 Z_1 Z$. Die beiden durch Z_1 und Z senkrecht zur Mittellinie $K_1 K_2$ gezogenen Geraden x_1 und x liegen daher ähnlich zu A_1 als Strahlpunkt (§ 11,4cβ).

Der Punkt Z_1 liegt (nach S. 50, § 17,5b') auf der Polare des Ähnlichkeitspunktes zu K_1 und K_2; daher ist x_1 die Ähnlichkeitspolare, während x die Bildachse beider Kreise ist. Es ergibt sich also:

Wenn zwei Kreise von einem dritten berührt werden, so ist die Bildachse der beiden ersten Kreise, als Gerade zum dritten Kreise aufgefaßt, das ähnlich liegende Bild der Ähnlichkeitspolare in einem der ersten Kreise, und zwar einer äußeren Ähnlichkeitspolare bei gleichartiger Berührung beider Kreise durch den dritten, einer inneren bei ungleichartiger Berührung.

10. Nehmen wir nun an (Fig. 91), ein dritter Kreis K_3 werde ebenfalls von K berührt, y sei Bildachse zu K_1 und K_3, y_1 Polare in K_1 zu dem Ähnlichkeitspunkt von K_1 und K_3, so ist auch y p. ä. y_1 zu A_1 als Ähnlichkeitspunkt für K und K_1. Daher liegen auch die Schnittpunkte V (xy) und V_1 $(x_1 y_1)$ auf einem Ähnlichkeitsstrahl durch A_1 (S. 30, § 11,5). Also:

Wenn drei Kreise von einem vierten berührt werden, so liegt der Berührungspunkt A_1 eines der drei Kreise auf der Geraden durch das Potenzzentrum V und durch den Schnittpunkt V_1 der Polaren (x_1 und y_1) der Ähnlichkeitspunkte dieses Kreises in Bezug auf die beiden andern,

wobei jeweils der äußere Ähnlichkeitspunkt in Betracht zu ziehen ist, wenn die Berührung der beiden Kreise gleichartig ist, der innere bei ungleichartiger Berührung.

Zusatz. Die in Bezug auf K_1 polare Figur zu A_1, V und V_1 zeigt, daß die Berührende in A_1 durch den Schnittpunkt der Polare von V (zu K_1) und der Verbindungsgeraden der Ä.-Punkte zu $K_1 K_2$ und $K_1 K_3$ geht.

§ 24. Anwendung zur Zeichnung berührender Kreise.

Apollonische Aufgabe.

1. Aufgabe. (Apollonius von Pergä, 220 v. Chr.) *Zu irgend dreien der Gebilde Punkt, Gerade, Kreis sollen Berührungskreise gezeichnet werden.*

Wir können zehn Fälle dieser Aufgabe unterscheiden. Es seien gegeben:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Punkte	3	2	2	1	1	1	—	—	—	—
Gerade	—	1	—	2	1	—	3	2	1	—
Kreise	—	—	1	—	1	2	—	1	2	3

Von diesen Aufgaben haben wir diejenigen, bei welchen kein Kreis gegeben ist, schon gelöst, nämlich I und VII im 1. Teil (S. 66, § 35), ferner II und IV im 2. Teil (S. 28, § 10,3).

Erste Lösungsart.

2. Aufgabe III. Die beiden Punkte A und B und der Kreis C seien gegeben. — Von einem beliebigen Kreis durch A und B, welcher den Kreis C in P und Q schneidet, trifft die Gerade PQ mit der Verbindungsgeraden AB in einem Punkt X zusammen, dessen Potenz in Bezug auf den gegebenen Kreis $PX \cdot XQ$, in Bezug auf den zu zeichnenden $AX \cdot XB$ ist. Nun ist aber $PX \cdot XQ = AX \cdot XB$, da PQ und AB Sehnen des Hilfskreises sind; daher liegt X als ein Punkt gleicher Potenz für den gegebenen und gesuchten Kreis (§ 9,7a) auf der gemeinsamen Berührenden beider Kreise; hiernach ist der Berührungspunkt leicht zu finden. Die beiden Berührenden aus X ergeben im allgemeinen zwei Kreise.

3. Aufgabe V. Der Punkt A, die Gerade b und der Kreis C seien gegeben. — Der Durchmesser DD_1 sei senkrecht zu b, und diese Senkrechte schneide b in E. Die fraglichen Berührungspunkte X auf b und Y auf dem Kreis C müssen (nach I. Teil § 34,5a) auf einer Geraden liegen mit dem einen Grenzpunkt D des zu b senkrechten Durchmessers. Dann liegt $\triangle DEX$ gewendet ähnlich DYD_1, daher $DD_1 \cdot DE = DY \cdot DX$. Legt man nun durch AD_1E einen Kreis und zieht DA, welche Verbindungsgerade diesen Kreis noch in F treffe, so ist auch $DA \cdot DF = DD_1 \cdot DE = DY \cdot DX$, d. h. der Kreis durch AXY geht auch durch F. Somit ist in F ein zweiter Punkt

des fraglichen Kreises gefunden, und die Aufgabe ist so auf III zurückgeführt, wobei zur weiteren Lösung der Kreis um AED benutzt werden kann. So ergeben sich zwei Kreise durch A und F; noch zwei weitere Kreise erhält man bei Vertauschung der Bedeutung von D und D_1.

4. Aufgabe VI. Der Punkt A und die beiden Kreise B und C seien gegeben. — Die fraglichen Berührungspunkte Y und Z auf B und C sind nicht ähnlich liegende Punkte auf einem Strahl des Ähnlichkeitspunktes D beider Kreise. Sind E und F zwei solche Punkte eines weiteren Strahles, so ist $DE \cdot DF = DY \cdot DZ$. Legt man nun durch AEF einen Kreis und zieht AD, welche Verbindungsgerade diesen Kreis noch in G treffe, so ist $DA \cdot DG = DE \cdot DF = DY \cdot DZ$, d. h. G ist ein zweiter Punkt des Kreises durch AYZ; hiermit ist die Aufgabe auf III zurückgeführt. Im allgemeinen gibt jeder Ähnlichkeitspunkt zwei Kreise.

5. Aufgabe VIII. Zwei Gerade a und b seien gegeben und ein Kreis C, dessen Halbmesser r ist. — Diese Aufgabe kommt auf IV zurück, wenn man zu a und b je zwei Parallelstreifen aa_1, aa_2, bb_1, bb_2 zeichnet, deren Breite gleich r ist, und nun die Mittelpunkte der Kreise bestimmt, die durch den Kreismittelpunkt C gehen und $a_1 b_1$ oder $a_2 b_2$ berühren. Liegt der Schnittpunkt ab außerhalb des Kreises, so sind vier Kreise möglich, liegt er innen, acht Kreise.

6. Aufgabe IX. Eine Gerade a und zwei Kreise B und C seien gegeben, deren Halbmesser r_1 und r_2 seien ($r_2 < r_1$). — Zeichnet man zu a Parallelstreifen von der Breite r_2 und um den Mittelpunkt von B Kreise mit den Halbmessern $r_1 \pm r_2$, so hat man nur nach V die Mittelpunkte derjenigen Kreise zu bestimmen, welche durch den Mittelpunkt von C gehen und die Hilfslinien berühren. Es sind im allgemeinen acht Kreise möglich.

7. Aufgabe X. Drei Kreise A, B, C mit den Halbmessern r_1, r_2, r_3 seien gegeben ($r_1 > r_2 > r_3$). — Man beschreibe um den Mittelpunkt von A Kreise mit den Halbmessern $r_1 \pm r_3$, ebenso um B mit den Halbmessern $r_2 \pm r_3$ und bestimme die Mittelpunkte der Kreise, welche diese Hilfskreise berühren und durch den Mittelpunkt von C gehen, nach VI. Im allgemeinen kann der Berührungskreis alle drei Kreise gleichartig berühren (aus- oder einschließend), oder er kann zwei Kreise gleichartig und den dritten ungleichartig berühren, was im ganzen acht Berührungskreise gibt.

Zweite Lösungsart.

8. Aufgabe X. Man bestimmt die Ähnlichkeitspolaren je zweier Kreise (und zwar die zu einem äußeren oder inneren Ähnlichkeitspunkt bei gleich- oder ungleichartiger Berührung), hierauf den Achsen-

schnittpunkt; diesen verbindet man mit dem Schnittpunkt der beiden Ähnlichkeitspolaren in jedem Kreis; dann schneiden diese Verbindungsgeraden die zugehörigen Kreise in je zwei Punkten; je drei dieser Punkte sind Berührungspunkte eines der gesuchten Kreise.

Die übrigen Aufgaben kommen auf X zurück, wenn man die Gerade als die Grenzfigur betrachtet, welcher der Kreis sich nähert, sobald sein Halbmesser unbeschränkt zunimmt, und wenn man den Punkt als die Grenzfigur ansieht, in welche der Kreis bei unbeschränkt abnehmendem Halbmesser zusammenschrumpft.

Je größer ein Kreis wird, während ein zweiter Kreis unverändert bleibt, desto näher rückt die Potenzgerade an ihn selbst heran; der eine Abschnitt der Sehne muß nämlich abnehmen, während der andere zunimmt. Die Gerade (als Grenzfigur eines Kreisbogens mit unbeschränkt großen Halbmessern senkrecht zur Geraden) ist also zugleich Bildachse in Bezug auf einen Kreis; der Achsenschnittpunkt liegt in der Geraden.

Je größer ein Kreis wird, desto weiter rückt die äußere Ähnlichkeitspolare eines festen Kreises an den dem großen Kreis abgewendeten Teil des Kreises, die innere an den zugewendeten Teil, indem die äußeren gemeinsamen Berührenden mehr und mehr sich einem Winkel von $2R$ nähern, ebenso die beiden inneren. Die Ähnlichkeitspolaren eines Kreises in Bezug auf eine Gerade sind daher die mit letzterer parallelen Berührenden. Die Berührungspunkte derselben sind zugleich Ähnlichkeitspunkte und liegen daher (S. 35, § 12,5) auf der Geraden durch die Punkte, in der der Kreis und die Gerade von dem fraglichen Kreis berührt werden (vgl. I. Teil, S. 65, § 34,5a).

Der Punkt (als Grenzfigur des unbeschränkt zusammenschrumpfenden Kreises) hat mit einem Kreis die zugehörige Polare als Ähnlichkeitspolare und die Mittelsenkrechte zu Punkt und zugeordnetem Pol als Bildachse.

Auch die Aufgaben, in denen kein Kreis gegeben ist, können in dieser Weise gelöst werden, wie z. B. II, indem man etwa um beide Punkte Hilfskreise mit gleichen Halbmessern beschreibt und zur Geraden Parallelstreifen, deren Breite gleich dem Halbmesser ist, dann die Mittelpunkte der beiden Kreise sucht, welche die Kreise gleichartig und zugleich die passende Hilfsgerade berühren.

§ 25. Die Kegelschnitte als Bilder des Kreises.

A. Mit dem Kreise gemeinsame Eigenschaften der Kegelschnitte.

1. Die Bilder des Kreises, d. h. die Kegelschnitte sind je nach Lage der Fluchtgeraden (S. 64) von dreifacher Art.

Trifft nämlich die Fluchtgerade f den Kreis nicht (Fig. 92), so hat das Bild des Kreises keinen unendlich fernen Punkt, sondern ist wie der Kreis in

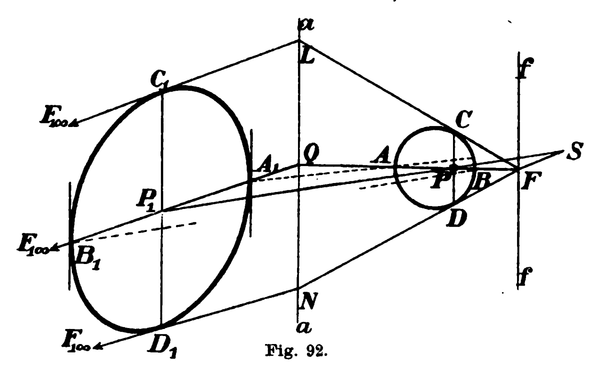


Fig. 92.

sich geschlossen, es ist das geschlossene Kreisbild oder die ***Ellipse.***

Berührt dagegen die Fluchtgerade den Kreis (Fig. 93), so hat das Bild einen unendlich fernen Punkt, d. h. nach einer Richtung hin erstreckt sich das Bild in unendliche Ferne, es ist das einfach offene Kreisbild oder die ***Parabel.***

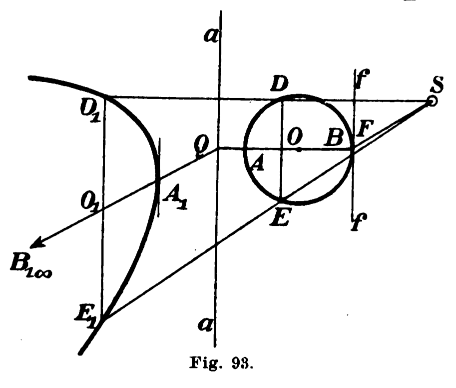


Fig. 93.

Schneidet aber die Fluchtgerade f den Kreis (Fig. 94), so hat das Bild zwei unendlich ferne Punkte; es verläuft längs zwei Richtungen in unendliche Ferne, es ist das zweifach offene Kreisbild oder die ***Hyperbel;*** hierbei zeichnen sich die Berührenden an den Schnittpunkten der Fluchtgeraden f als die beiden Geraden ab, längs welchen sich die Hyperbeläste derart ins Unendliche erstrecken, daß sie sich der Geraden mehr und mehr nähern, ohne sie je zu erreichen. Diese Geraden heißen Asymptoten.

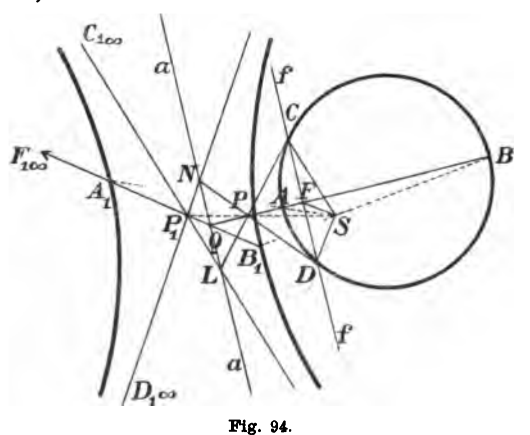


Fig. 94.

Man zeichnet das Bild eines Kreises nach § 21, 2 (S. 62), indem man durch eden abzubildenden Punkt

des Kreises und durch einen Punkt, dessen Bild gegeben ist, eine Gerade zieht, das Bild dieser Geraden durch den Bildpunkt und Achsenschnittpunkt zieht und auf dieser Bildgeraden den Punkt durch den Strahl des Kreispunktes bestimmt.

2. a) *Eine den Kreis schneidende Gerade wird wieder als solche, eine Berührende als Berührende abgebildet, Schnittpunkt als Schnittpunkt, Berührungspunkt als Berührungspunkt.*

Eine Gerade kann als Bild einer Geraden der Kreisfigur den Kegelschnitt in zwei Punkten schneiden, oder berühren (in einem Punkt), oder gar nicht treffen. Von einem nicht der krummen Linie angehörigen Punkt lassen sich entweder zwei oder keine Berührende ziehen.

Da die Bilder von vier harmonischen Punkten selbst wieder solche sind (S. 45, § 15,4), so folgt aus § 17,2 (S. 49):

b) *Bei allen durch einen Kegelschnitt gelegten Strahlen eines Punktes liegen die ihm harmonisch zugeordneten Punkte auf einer Geraden, der Polare des Punktes. Die Bilder von Pol und Polare sind ebenfalls Pol und Polare.*

c) Ebenso lassen sich *die Sätze von Pol und Polare, Viereck und Vierseit im Kreis* (S. 49, § 17,3—8) *auf die Kegelschnitte übertragen,* da sie sich nur auf Gerade und ihre Schnittpunkte oder Berührungspunkte beziehen.

Man erhält also die Polare zu einem Punkt oder den Pol zu einer Geraden durch ein Sehnenviereck oder berührendes Vierseit.

d) *Der Pol (P) der Fluchtgeraden (f) der Kreisfigur wird als Mittelpunkt (P_1) des Kegelschnitts abgebildet;*
denn von den Strahlen des Poles fallen im Bild die ihm zugeordneten Punkte in unendliche Ferne, sein Bild selbst fällt also in die Mitte der Sehnen (S. 44, § 15,2b).

Bei der Abbildung des Kreises als Hyperbel (Fig. 94) ist der Pol der Fluchtgeraden Schnittpunkt der an den Punkten der Fluchtlinie berührenden Geraden; *der Mittelpunkt der Hyperbel ist der Schnittpunkt der Asymptoten.*

Die Sehnen durch den Mittelpunkt heißen Durchmesser. Die Parabel hat keinen Mittelpunkt in endlicher Entfernung; dagegen hat sie parallele Durchmesser in der Richtung nach dem unendlich fernen Punkt.

e) Die Berührenden in den Grenzpunkten einer Sehne, die durch den Pol P der Fluchtgeraden geht, schneiden sich auf der Fluchtgeraden (S. 51, § 17,5b′); hieraus folgt für das Bild der Sehne, das durch den Mittelpunkt P_1 geht:

Die beiden Berührenden an den Grenzpunkten eines Durchmessers sind parallel.

Diese Berührenden und die ihnen parallelen Sehnen heißen dem Durchmesser zugeordnet (konjugiert).

f) Da dieser Durchmesser das Bild der Berührungssehne oder Polare des Fluchtpunktes der parallelen Berührenden und Sehnen ist, so folgt (S. 44, § 15, 2b):

Ein Durchmesser halbiert die ihm zugeordneten Sehnen.

g) Weiter folgt noch (aus S. 51, § 17, 5b′):

Die Berührenden in den Grenzpunkten einer Sehne schneiden einander auf dem ihr zugeordneten Durchmesser.

3. a) *Die Sätze von Pascal und Brianchon* (§ 14, 7, § 17, 8, § 23, 6, auch § 20, 4), *und die besonderen Fälle, die sich aus dem Zusammenfallen zweier benachbarten Stücke ergeben* (S. 70, § 23, 7,) *gelten für alle Kegelschnitte,* da sie nur die Lage von Punkten auf einer Geraden oder den Schnitt von Geraden in einem Punkt betreffen (2a).

Aus diesen Sätzen folgt:

b) *Ein Kegelschnitt ist eindeutig bestimmt, wenn von ihm gegeben sind:*

α) *fünf Punkte,*

β) *vier Punkte und die Berührende in einem,*

γ) *drei Punkte und die Berührenden in zweien.*

Die fünf Punkte des Kegelschnitts seien *12345*; ein beliebiger Strahl $5Q$ kann nun einen Kegelschnitt durch die fünf Punkte nur in einem solchen Punkt treffen, der mit den gegebenen Punkten ein Pascalsches Sechseck bildet. Der Schnittpunkt von *12* und *45* sei P, von *23* und $5Q$ sei

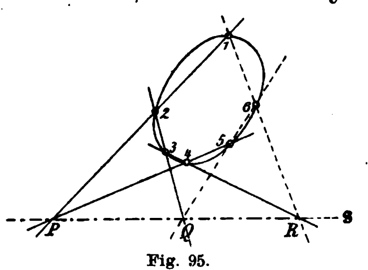


Fig. 95.

Q, *34* treffe PQ in R; dann muß der Schnittpunkt *6* von $Q5$ und $R1$ dem Kegelschnitt angehören. In dieser Weise ist die Lage des Kegelschnittpunktes auf jedem beliebigen Strahl durch *5* und somit der Kegelschnitt selbst eindeutig bestimmt.

α') *fünf Berührende,*

β') *vier Berührende und der Berührungspunkt auf einer,*

γ') *drei Berührende und die Berührungspunkte auf zweien.*

Die fünf Berührenden des Kegelschnitts seien *I II III IV V*; von einem beliebigen Punkt Q_1 auf V kann nun an einen Kegelschnitt, dem diese Berührenden angehören, nur eine solche Berührende gezogen werden, die mit den gegebenen ein Brianchonsches Sechsseit bildet. Die Ver-

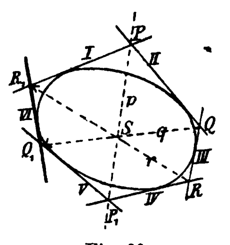


Fig. 96.

bindungsgerade von *I II* und *IV V* sei p, von *II III* und Q_1 sei q, von *III IV* und pq sei r; dann muß die Verbindungsgerade von Q_1 und dem Schnittpunkt rI die Berührende des Kegelschnitts sein. So ist jede Berührende des Kegelschnitts, die

durch irgend einen Punkt von V geht, und somit der Kegelschnitt selbst eindeutig bestimmt.

Indem man die Gerade s sich um P drehen läßt, gleiten die Schnittpunkte Q und R auf *23* und *34* hin, und man erhält durch die Verbindungsgeraden dieser Punkte mit *5* und *1* beliebig viele Punkte des Kegelschnitts.

Indem man den Punkt S auf p hingleiten läßt, drehen sich q und r um Q und R, und man erhält durch die Schnittpunkte dieser Geraden mit V und I beliebig viele Berührende des Kegelschnitts.

Die vier übrigen Fälle $\beta\gamma$ und $\beta'\gamma'$ sind in diesen α und α' einbegriffen, indem hierbei nur zwei benachbarte Stücke zusammenfallen.

Anmerkung. Daß *zu solchen Stücken immer auch ein Kegelschnitt möglich ist,* falls nicht drei Punkte auf einer Geraden liegen oder 3 Gerade durch einen Punkt gehen, wird bewiesen, indem man zunächst von den letzten Fällen γ und γ' ausgeht. Man nimmt als Vorlage einen Kreis, der die beiden Berührenden berührt, und als Strahlpunkt deren Schnittpunkt, und bestimmt zu allen 5 Stücken die entsprechenden des Kreises; das Bild dieses Kreises ist dann der verlangte Kegelschnitt. Für β zeichnet man nach Pascal noch eine Berührende und führt den Fall auf γ zurück, ebenso dann α auf β.

Die Sätze § 20, 4 (S. 60) lassen sich nun auch auf Kegelschnitte anwenden, und für diese gelten dann auch deren Umkehrungen, wonach *zwei gegenseitig bestrahlbare, aber nicht bestrahlt liegende*

Punktreihen durch die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte die Berührenden

Strahlenbüschel durch die Schnittpunkte entsprechender Strahlen die Punkte

eines Kegelschnittes geben.

4. *Ein Kegelschnitt liegt bestrahlt von einem Kreis, wenn dies der Fall ist für je*

a) *5 Punkte derselben,*

b) *4 Punkte und die Berührende in einem von ihnen,*

c) *3 Punkte und die Berührenden in zweien.*

a′) *5 Berührende derselben,*

b′) *4 Berührende und den Berührungspunkt auf einer von ihnen,*

c′) *3 Berührende und die Berührungspunkte auf zweien.*

Denn der Kreis mit fünf solchen Stücken gibt als Bild einen Kegelschnitt, der zu den 5 andern Stücken gehört, da Punkte, Berührende und Berührungspunkte ihre Eigenschaft im Bild beibehalten. Dieses Bild des Kreises muß aber mit dem durch die fünf Stücke bestimmten Kegelschnitt zusammenfallen, da es zu diesen nur einen Kegelschnitt gibt.

Um hierbei nachzuweisen, daß zwei Fünfecke oder Fünfseite gegenseitig bestrahlt sind, ist zu zeigen, daß für ihre Punkte und Geraden die in § 21, 2 und 3 (S. 62) angegebenen Bedingungen erfüllt sind.

5. Ist P ein beliebiger Punkt innerhalb eines Kegelschnittes (d. h. innerhalb des Teiles der Fläche, durch den keine Berührende geht), ist ferner AB der Durchmesser durch den Punkt, CD die zugeordnete Sehne

durch ihn, so bestimmt das vollständige Sehnenviereck $ABCD$ durch die Verbindungsgerade der Nebenecken R und L die Polare zu P (2c); hierbei ist $LR \parallel CD$, da der Schnittpunkt von CD und LR in unendliche Ferne fällt, wenn P die Mitte von CD ist (S. 44, § 15, 2b). Nehmen wir nun QS als Mittelsenkrechte zu LR und $QS = QR$ und betrachten wir S als Strahlpunkt, LR als Fluchtgerade, so kann noch P_1 als Bild von P auf SP beliebig angenommen werden. Es ist dann $C_1P_1D_1 \parallel LR \parallel CPD$

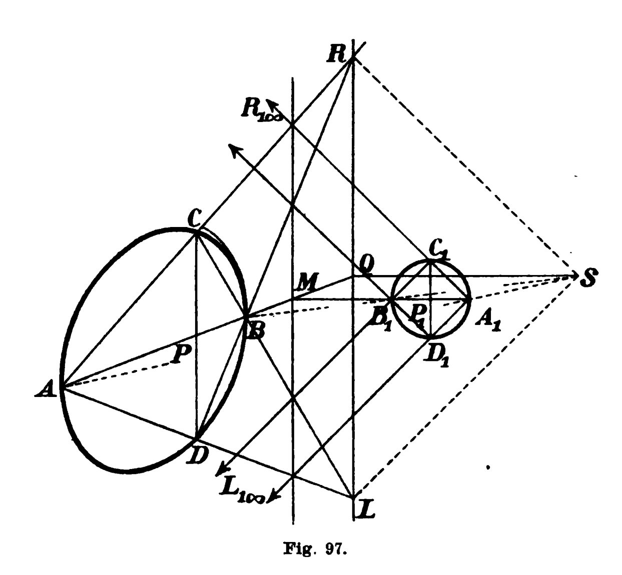


Fig. 97.

parallel der Bildachse (S. 62, § 21, 3 und 4), ferner $A_1C_1 \parallel SR \parallel D_1B_1$ und $A_1D_1 \parallel SL \parallel C_1B_1$, da die Bilder von R und L in unendliche Entfernung fallen. Da nun RSL die Hälfte eines Quadrates darstellt, so ist $A_1B_1C_1D_1$ ein Quadrat, um das ein Kreis gelegt werden kann. Von diesem Kreis liegen dann nicht bloß die 4 Punkte $A_1B_1C_1D_1$, sondern auch die Berührenden in A_1 und B_1 bestrahlt zu $ABCD$ und den Berührenden in A und B, da diese Berührenden parallel der Fluchtgeraden oder Achse sind. Der Kegelschnitt ist also (nach 4b) ein von dem Kreise bestrahltes Bild, wobei P das Bild des Mittelpunktes P_1 ist (2d).

a) *Ein Kegelschnitt kann als Bild eines Kreises und zugleich ein beliebiger Punkt innerhalb der Linie als Bild des Kreismittelpunktes oder eine Gerade außerhalb als Bild der unendlich fernen Geraden aufgefaßt werden. Hierbei entsprechen sich Punkt und Gerade als Pol und Polare. Der Durchmesser des Punktes im Kegelschnitt und seine zugeordnete Sehne sind Bilder zweier zu einander senkrechten Durchmesser im Kreis.*

b) *Man erhält den Strahlpunkt für diese Abbildung, indem man das vollständige Sehnenviereck der Grenzpunkte des Durchmessers (AB) und der zugeordneten Sehne (CD) durch den Punkt (P) zeichnet und auf der Mittel-*

senkrechten zu den äußeren Nebenecken (RL) den halben Abstand derselben anträgt ($QS = QR = QL$).

In obiger Figur hätte man QS auch auf der anderen Seite von LR antragen können.

Dieser Satz wird angewendet, um Eigenschaften der Kegelschnitte, die bei der Abbildung sich nicht ändern, nachzuweisen, indem man diese Eigenschaften zunächst an der einfacheren Figur mit dem Kreis aufsucht. (Vgl. § 22, 4 u. § 23, 6.)

B. Gleichungen der Kegelschnitte.

6. a) Wenn von einer Ellipse ein Durchmesser $AB = 2a$ und der zugeordnete Durchmesser $CD = 2b$ gegeben ist, so ergibt sich ein weiterer Punkt nach Pascal, indem man die Berührenden in A und B, die parallel zu CD sind, noch als gegeben annimmt und in A mit 12, in B mit 45 bezeichnet, während C der Punkt 3 sei. Auf irgend einer Geraden durch 5 findet man dann den Punkt 6, indem 12 und 45 den Punkt P_∞, 23 und die Gerade durch 5 den Punkt Q und QP_∞ auf 34 den Punkt R ergibt; dann liegt 6 oder L im Schnittpunkt von BQ und AR.

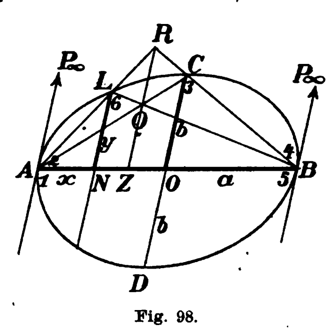


Fig. 98.

Zieht man durch L die dem Durchmesser zugeordnete Halbsehne $LN = y$ und bezeichnet den Abschnitt AN mit x, so daß dann $NB = (2a - x)$ ist, so folgt

im Zweistrahl LAN mit den Parallelen LN und RZ: $\dfrac{LN}{AN} = \dfrac{RZ}{AZ}$,

im Zweistrahl LBN mit den Parallelen LN und QZ: $\dfrac{LN}{NB} = \dfrac{QZ}{ZB}$;

daher
$$\frac{LN^2}{AN \cdot NB} = \frac{RZ}{ZB} \cdot \frac{QZ}{AZ} = \frac{CO}{OB} \cdot \frac{CO}{OA},$$

oder $\dfrac{y^2}{x(2a - x)} = \dfrac{b^2}{a^2}$, $\quad \boldsymbol{y^2 = \dfrac{b^2}{a^2} x\,(2a - x)}$ ***(Ellipsengleichung).***

Für den Kreis über $2a$ als Durchmesser ist die Halbsehne $Y \perp x$, und die Kreisgleichung wird:

$$Y^2 = x\,(2a - x),$$

so daß $y : Y = b : a$; hiernach kann der Kreis benutzt werden, um die Ellipse zu zeichnen. (Parallel-Bestrahlung zwischen Kreis und Ellipse, vgl. S. 64, § 21, 9).

b) In der Hyperbel nehmen wir als Punkt 3 den unendlich fernen Punkt einer Asymptote an. Es ergibt sich dann ebenso:

$$\frac{LN^2}{AN \cdot NB} = \frac{RZ}{ZB} \cdot \frac{QZ}{AZ}.$$

Wenn wir nun noch den Abschnitt der in A Berührenden vom Berührungspunkt bis zur Asymptote mit b bezeichnen, so verhält sich

$$RZ : ZB = b : a = QZ : AZ,$$

also
$$\frac{y^2}{x(2a+x)} = \frac{b^2}{a^2},$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} x(2a+x)$$

(Hyperbelgleichung).

c) In der Parabel sei Punkt 3 ein beliebiger Punkt der Parabel. Die Halbsehne zu 3 sei y_1, der zugehörige Abschnitt des Durchmessers x_1. Dann verhält sich

Fig. 99.

$$\frac{LN}{AN} = \frac{RZ}{AZ} = \frac{y_1}{AZ}$$

und
$$\frac{QZ}{AZ} = \frac{y_1}{x_1}.$$

Da $LN = QZ$ ist, so folgt:

$$\frac{\overline{LN}^2}{AN} = \frac{y_1^2}{x_1}, \quad \frac{y^2}{x} = \frac{y_1^2}{x_1},$$ d. h. dieser Ausdruck bleibt für alle Punkte der Parabel der gleiche:

$$\frac{y^2}{x} = p, \quad y^2 = px \text{ (Parabelgleichung).}$$

Fig. 100.

7. Wenn man um den Mittelpunkt O eines Kegelschnitts einen Kreisbogen beschreibt, so ist die gemeinsame Sehne EF senkrecht zu dem sie halbierenden Durchmesser AB, dem sie zugeordnet ist (2, f). Der Kreis um AB als Durchmesser hat mit dem Kegelschnitt die Grenzpunkte A und B und ihre Berührende gemeinsam, also vier Stücke, und kann daher den Kegelschnitt in keinem weiteren Punkt treffen, da er andernfalls ganz mit ihm zusammenfallen müßte (3, b, γ). Der Kreis schließt den Kegelschnitt entweder ganz ein und hat als Durchmesser den größten Durchmesser oder die große Achse (Hauptachse) der Ellipse, oder er schließt ihn ganz aus und hat den kleinsten Durchmesser, die kleine Achse der Ellipse, die reelle Achse (Hauptachse) in der Hyperbel. Es ist hiermit auch bewiesen, daß es nur ein Paar zueinander senkrechter zugeordneter Richtungen gibt. Bei der Parabel (Fig. 102) sei s senkrecht zur Richtung des Durchmessers a_1; dann ist der diese Sehne halbierende Durchmesser a die Achse der Parabel.

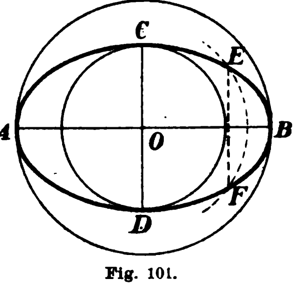
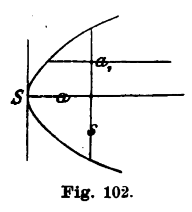


Fig. 101.

a) *Die Ellipse und die Hyperbel haben zwei zueinander senkrechte Mittellinien oder Achsen, die Parabel hat eine einzige.*


Fig. 102.

In der Hyperbel sind die Achsen natürlich auch Mittellinien oder Winkelhalbierende der in unendlicher Ferne Berührenden.

Nehmen wir an, die Kegelschnitt-Gleichungen in 6 beziehen sich auf die halbe Hauptachse a und die zugeordnete Halbachse b, und setzen wir noch $\frac{2b^2}{a} = p$, so nehmen die Gleichungen folgende Form an:

für die Parabel $y^2 = px$ für die Ellipse $y^2 = px - \frac{px^2}{2a}$

für die Hyperbel $y^2 = px + \frac{px^2}{2a}$.

Die Größe $p = \frac{2b^2}{a}$ heißt der Parameter des Kegelschnittes, x die Abszisse, y die Ordinate eines Punktes des Kegelschnittes.

Während das Quadrat der Ordinate eines Punktes dem Produkt des Parameters und der Abszisse in der Parabel gleichkommt (παραβάλλειν), fehlt (ἐλλείπειν) ihm hierzu in der Ellipse die Größe $\frac{px^2}{2a}$ und übertrifft (ὑπερβάλλειν) es in der Hyperbel das Produkt um diese Größe.

Die Punkte der Hauptachse, deren Ordinate gleich dem halben Parameter ist, $y = \frac{p}{2}$ (die Sehne $2y = p$), *heißen die Brennpunkte. Die Polare eines Brennpunktes heißt Leitgerade.*

Die Abszisse der Brennpunkte ergibt sich, indem man $y = \frac{p}{2} = \frac{b^2}{a}$ setzt,

in der Parabel aus $\frac{p^2}{4} = px$, nämlich: $x = \frac{p}{4}$,

in der Ellipse aus $\frac{p^2}{4} = \frac{b^4}{a^2} = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2$, $x = a \pm \sqrt{a^2 - b^2}$,

in der Hyperbel aus $\frac{p^2}{4} = \frac{b^4}{a^2} = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2$, $x = -a \pm \sqrt{a^2 + b^2}$.

b) *Die Ellipse hat zwei Brennpunkte auf der großen Achse im Abstand* $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ *vom Mittelpunkt, die Hyperbel hat ebenfalls zwei auf der reellen Achse im Abstand* $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ *vom Mittelpunkt, die Parabel hat einen auf der Achse im Abstand* $\frac{p}{4}$ *vom Scheitel.*

Dieser Abstand c (die lineare Exzentrizität) ist leicht durch ein rechtwinkeliges Dreieck aus a und b zu erhalten.

C. Eigenschaften der Brennpunkte.

8. Die Eigenschaften eines Brennpunktes ergeben sich als Folgerungen der Vereinigung von Strahlpunkt und Kreismittelpunkt in ihm:

Jeder Kegelschnitt ist das Bild eines beliebigen Kreises mit dem Brennpunkt als Mittelpunkt und Strahlpunkt und mit der Leitgeraden als Fluchtgeraden.

Zur Begründung dieses Satzes ist für den Brennpunkt F als Strahlpunkt die in 5b bestimmte Lage nachzuweisen; d. h. wird wie dort zu F das Viereck $ABCD$ mit den Nebenecken L und R gezeichnet, so ist für den Strahlpunkt F nachzuweisen, daß $FQ = QL$ ist. Da O die Mitte von AB, F und Q harmonisch zugeordnete Punkte sind, so ist

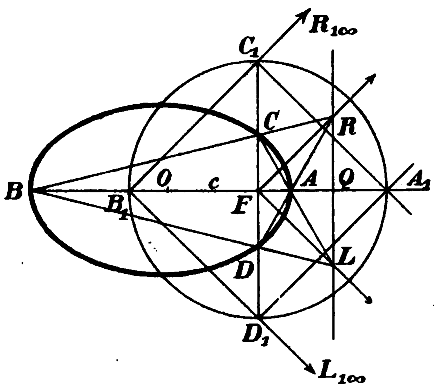


Fig. 103.

$$OF \cdot OQ = \overline{OA}^2 \quad (\text{S. } 21, \S\ 7, 4)$$

oder $c \cdot OQ = a^2$, $OQ = \frac{a^2}{c}$, $\quad FQ = OQ - c = \frac{a^2 - c^2}{c} = \frac{b^2}{c}$.

Ferner ist $AQ = OQ - a = \frac{a}{c}(a - c)$ und da $FA = a - c$, so verhält sich

$$AQ : FA = a : c,$$

daher auch $LQ : FC = AQ : FA = a : c$ und da $FC = \frac{b^2}{a}$ ist (7), so ergibt sich

$$LQ = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{b^2}{c}; \quad \text{also} \quad FQ = LQ.$$

Das Bild des Kegelschnittes mit F als Strahlpunkt und RL als Fluchtgerade ist also ein Kreis (5a). Zugleich muß das Bild von F, des Poles der Fluchtgeraden RL, d. i. der Mittelpunkt des Kreises (5a) auf F fallen, da der Strahlpunkt sich selbst als Bild entspricht.

Das gleiche ergibt sich für die Hyperbel. In der Parabel liegt A in der Mitte von FQ, da B in unendliche Entfernung fällt, $RB_\infty \parallel FQ$, woraus sofort folgt $\quad FQ = QR\ (= FC)$.

Zusatz. Der Kreis um den Brennpunkt kann dazu dienen, *zu einem gegebenen Brennpunkt und drei Punkten oder Berührenden des Kegelschnitts weitere Stücke* (z. B. die Grenzpunkte der Achse) *zu bestimmen,* indem man die gegebenen Stücke und dann auch die gesuchten als Bilder von solchen am Kreis auffaßt. Bei drei gegebenen Berührenden löse man zuerst die Aufgabe aus I. Teil XVI, $4r$ (S. 130).

9. Fällt man von einem Punkt P des Kegelschnittes (Fig. 104) die Senkrechte PK auf die Leitgerade KM, so ist zu F als Strahlpunkt das Bild dieser Geraden P_1N_1 parallel zu dem Strahl FK nach dem Fluchtpunkt K auf der Fluchtgeraden KM zum Kegelschnitt. Umgekehrt bestimmt der Strahl $FN_1 \parallel PK$ den Fluchtpunkt N_1 und die Fluchtgerade N_1V_1 zu dem Kreis,

der das Bild des Kegelschnittes ist. Nun ist $\triangle FPK \backsim FP_1N_1$, somit verhält sich $FP : PK = FP_1 : FN_1 = r : d$, wenn r der Halbmesser des

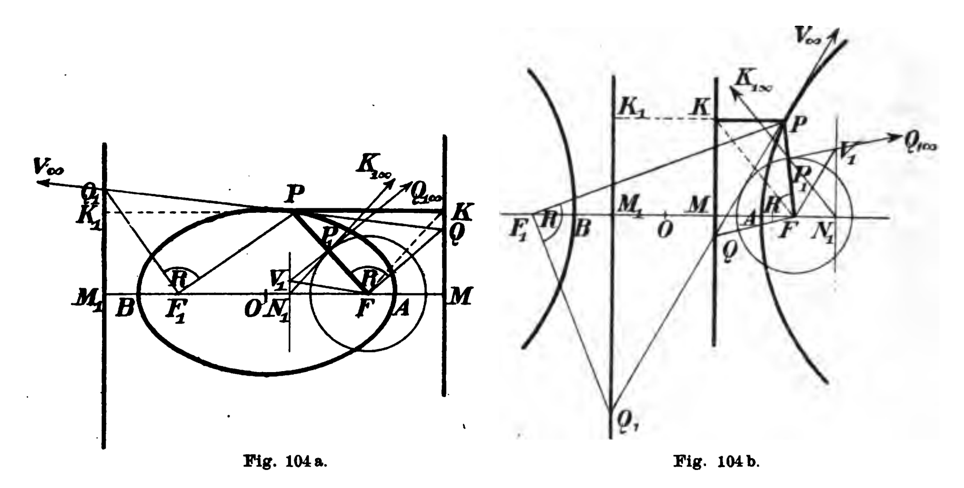


Fig. 104 a. Fig. 104 b.

Kreises und d der Abstand seiner Fluchtgeraden vom Mittelpunkt ist. Da letzteres Verhältnis für alle Punkte des Kreises unverändert bleibt, so gilt das gleiche für das erstere Verhältnis bei allen Punkten des Kegelschnittes.

In einem Kegelschnitt ist das Verhältnis der Abstände eines Punktes vom Brennpunkt und von der Leitgeraden unveränderlich; es ist < 1 *bei der Ellipse,* $= 1$ *bei der Parabel,* > 1 *bei der Hyperbel.*

Denn wenn $FN_1 = d > r$ ist, (Fig. 104a) so trifft die Fluchtgerade den Kreis nicht und das Bild des Kreises ist eine Ellipse, für $FN_1 = d = r$ (Fig. 104c) ist die Fluchtgerade Berührende und der Kegelschnitt eine Parabel, für $FN_1 = d < r$ (Fig. 104b) eine Hyperbel.

Der allgemein geltende Wert dieses Verhältnisses lässt sich auch aus dem besonderen des Scheitelpunktes A der Hauptachse erkennen; es verhält sich nämlich (nach 8) $FA : AM = c : a$ (Exzentrizität).

10. Die Strahlstrecke vom Brennpunkt nach einem Punkt des Kegelschnittes heißt Fahrstrahl.*)

---

*) Ist r der Fahrstrahl eines Punktes P, $\alpha = AFP$ der Winkel des Strahles nach dem Scheitel A mit dem Fahrstrahl, so ist der Abstand des Punktes von der Leitgeraden bei Ellipse und Hyperbel $PK = \frac{ra}{c}$ (9), und es ist

$$\frac{ra}{c} + r\cos\alpha = FM \text{ (Fig. 104a und b)} = \frac{b^2}{c} \text{ (8)} \qquad \text{oder} \qquad r = \frac{b^2}{a + c\cos\alpha},$$

bei der Parabel (Fig. 104c)

$$KP = r, \quad FM = \frac{p}{2}, \quad r + r\cos\alpha = \frac{p}{2}, \qquad r = \frac{p}{2(1+\cos\alpha)}$$

(Polargleichungen der Kegelschnitte).

Von der in P Berührenden erhält man durch den Strahl FQ, der parallel zur Berührenden $P_1 V_1$ im Kreis ist, den Fluchtpunkt Q auf der Fluchtgeraden KM; da die Berührende $P_1 V_1 \perp FP_1$ ist, so ist auch $FQ \perp FP$. Nun ist Q auch der Fluchtpunkt zu der Berührenden im andern Schnittpunkt der Geraden FP mit dem Kegelschnitt, da die entsprechende Kreisberührende der in P_1 parallel ist; Q ist also der Pol von FP nach § 17, 3a′ (S. 49).

Der Strahl vom Brennpunkt nach dem Pol eines Fahrstrahles ist senkrecht zu diesem.

11. In der Parabel ist $FP = PK$, da $FP_1 = FN_1$ ist (9):

a) *Der Abstand eines Parabelpunktes vom Brennpunkt ist gleich dem von der Leitgeraden.*

Die Berührende PQ trifft (nach 10) die Leitgerade in Q so, daß $\sphericalangle PFQ = R = PKQ$; daher ist $\triangle PFQ \cong PKQ$, $\sphericalangle QPF = QPK$, d. h.:

b) *Die Berührende einer Parabel bildet mit dem Fahrstrahl und der Achsenrichtung gleiche Winkel.*

Dann ist PQ Mittelsenkrechte im gleichschenkeligen Dreieck FPK, also:

Fig. 104c.

c) *Die Berührenden der Parabel sind die Mittelsenkrechten der Strahlstrecken vom Brennpunkt nach den Punkten der Leitgeraden; — der Berührungspunkt liegt jeweils auf der Senkrechten (KP) in diesem Punkt der Leitgeraden.*

Die Berührende trifft KF in der Mitte L; und da $AF = AM$, so ist $AL \parallel KM$, d. h. AL ist die Berührende im Scheitel A der Parabel.

d) *Die Berührenden der Parabel sind die Senkrechten an den Endpunkten der Strahlstrecken vom Brennpunkt nach den Punkten der Berührenden im Scheitel der Parabel; — die Strahlstrecke (FL) ist die Mittelsenkrechte zwischen dem Berührungspunkt und dem Schnittpunkt der Berührenden mit der Achse der Parabel.*

Das letztere ergibt sich leicht mit Beachtung der Lage, in die LKP durch die Umdrehung um L kommt.

Diese Sätze dienen zur *Bestimmung von Punkten und Berührenden der Parabel, wenn der Brennpunkt und die Leitgerade gegeben sind.*

12. Für die Ellipse und Hyperbel ergeben sich diesen Sätzen entsprechende, in denen beide Brennpunkte in Betracht kommen. Für beide Brennpunkte gilt (9) in Fig. 104a und b:

$$FP : KP = c : a = F_1 P : PK_1\,,$$

woraus folgt $\quad (F_1 P \pm FP) : FP = (PK_1 \pm KP) : KP,$

wobei das obere Zeichen der Ellipse entspricht, das untere der Hyperbel.

$$(F_1P \pm PF) : KK_1 = PF : PK = c : a.$$

Nun ist $$KK_1 = MM_1 = \frac{2a^2}{c} \text{ (siehe in 8)},$$

also $$F_1P \pm PF = 2a.$$

a) *In der Ellipse ist die Summe der Fahrstrahlen eines Punktes gleich der großen Achse, in der Hyperbel der Unterschied der Fahrstrahlen gleich der reellen Achse.*

Wenn die Brennpunkte und die Achse gegeben, so erhält man Punkte des Kegelschnitts, indem man mit den beiden Teilen, in die ein beliebiger Punkt die Achse (ihre Verlängerung bei der Hyperbel) teilt, Kreisbögen von den Brennpunkten aus beschreibt und deren Schnittpunkte bestimmt. Legt man einen in sich geschlossenen Faden um Stifte in den Brennpunkten, so beschreibt der den Faden spannende Stift eine Ellipse.

Ferner folgt aus obiger Verhältnis-Gleichung:

$$F_1P : FP = PK_1 : PK = PQ_1 : PQ;$$

da noch $$\sphericalangle PF_1Q_1 = R = PFQ,$$

so ist $$\triangle F_1PQ_1 \backsim FPQ, \qquad \sphericalangle F_1PQ_1 = FPQ.$$

b) *Die Berührende eines Kegelschnittes bildet mit beiden Fahrstrahlen des Berührungspunktes gleiche Winkel.*

Licht- und Wärmestrahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen, haben nach der Zurückwerfung am Kegelschnitt im andern Brennpunkt ihren Strahlpunkt; in der Parabel (11b) werden sie parallel zur Achse zurückgeworfen.

Trägt man an (oder auf) den einen Fahrstrahl F_1P (Fig. 105a und b) den andern $F_2P = FP$ an, so ist $F_1F_2 = 2a$, und für die Punkte F_2 und F ist die Berührende in P die Mittellinie, da $\sphericalangle FPL = F_2PL$ ist.

c) *Die Berührenden des Kegelschnitts sind Mittelsenkrechte zu den Strahlstrecken von einem Brennpunkt zu den Punkten des Kreises, der mit der Hauptachse als Halbmesser um den andern Brennpunkt beschrieben ist; — der Berührungspunkt liegt jeweils auf dem Halbmesser (F_1F_2) des Punktes dieses Kreises.*

Nun ist $$FL = LF_2 \quad \text{und} \quad FO = OF_1, \quad \text{somit}$$

$$OL \parallel F_1F_2 \quad \text{und} \quad OL = \frac{1}{2}F_1F_2 = a, \qquad \text{d. h.:}$$

d) *Die Berührenden sind die Senkrechten an den Endpunkten der Strahlstrecken vom Brennpunkt nach den Punkten des Kreises um die Hauptachse als Durchmesser; — die Fahrstrahlen des Berührungspunktes sind jeweils parallel zu den Halbmessern (OL) dieser Punkte des Kreises.*

Wie nämlich $OL \parallel F_1F_2$, so ist auch $FP \parallel OL_1$.

Die Senkrechte F_1L_1 vom zweiten Brennpunkt auf die Berührende

PL liegt dann gegengesetzt zu FL_2 in Bezug auf den Mittelpunkt O, und es ist in dem Kreis um O (S. 24, § 9, 2 und 6)

$$FL \cdot F_1L_1 = FL \cdot FL_2 = FA \cdot FB = (c-a)(c+a) = c^2 - a^2 = \mp b^2 \ (7).$$

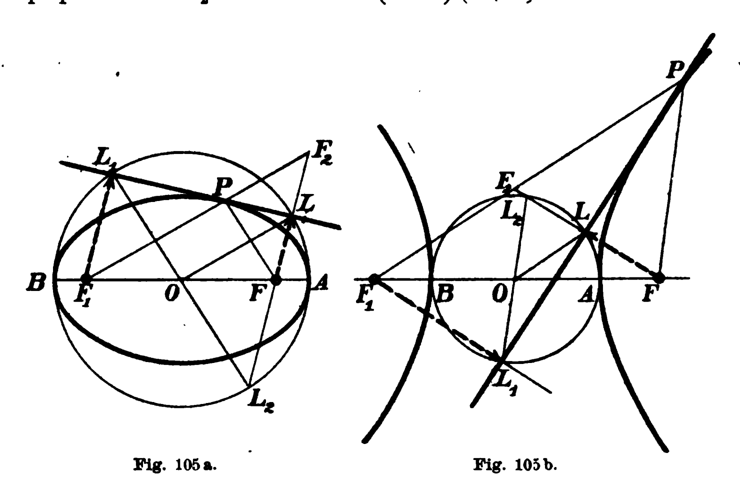


Fig. 105a. Fig. 105b.

e) *Das Produkt der Abstände der beiden Brennpunkte von einer Berührenden hat für alle Berührende einen unveränderlichen Wert* $= b^2$.

Anmerkung über Planeten-Bewegung. Die Sätze 12c und e können (nach Maxwell) dazu dienen, aus den Keplerschen Gesetzen der Planetenbewegung das Newtonsche Gesetz der Anziehung der Sonne abzuleiten. Nach dem ersten Keplerschen Gesetz bewegen sich die Planeten in Ellipsen um die Sonne als deren gemeinsamen Brennpunkt, und nach dem zweiten beschreibt der Fahrstrahl eines Planeten in gleichen Zeiten Flächen von gleicher Größe. Ist v der Weg des Planeten in einem bestimmten Zeitteilchen (Sek.) auf der Berührenden in P, so ist der Inhalt des Dreiecks, das der Fahrstrahl von F_1 (der Sonne) beschreibt, $= \frac{v \cdot F_1L_1}{2} = k$ eine für alle Punkte der Bahn und gleiche Zeitteilchen unveränderliche Größe; es ist also $v = \frac{2k}{F_1L_1}$, und da $F_1L_1 \cdot FL = b^2$ (12e), so folgt $v = \frac{2k}{b^2} \cdot FL = \frac{k}{b^2} \cdot FF_2$. Nach Verlauf des Zeitteilchens ist die Geschwindigkeit auf der nächsten Berührenden $v' = \frac{k}{b^2} \cdot FF'_2$, wobei F'_2 mit F_2 auf dem Kreis um F_1 liegt, dessen Halbmesser $F_1F_2 = 2a$ ist (12c). Nun verhält sich $FF_2' : FF_2 = v' : v$, und beide Größenpaare schließen den gleichen Winkel ein, weil [sie] paarweise senkrecht zueinander sind (12c). Ist nun g die Geschwindigkeit, die (gemäß dem Gesetz der Zusammensetzung von Geschwindigkeiten) mit v zusammen die neue Geschwindigkeit v' (nach Ablauf der Sekunde) bestimmt, so bilden $vv'g$ ein Dreieck, das dem $\triangle\, FF_2F'_2$ ähnlich ist, so daß $g = \frac{k}{b^2} \cdot F_2F'_2$ und die Richtung von $g \perp F_2F'_2$. Die Strecke $F_2F'_2$ kann aber als sehr kleiner Bogen des Kreises um F_1 aufgefaßt werden, so daß die Richtung von g mit der von F_2F_1 zur Sonne hin geht. Wenn α der

Winkel ist, um den sich der Fahrstrahl $F_1 P = r$ nach $F_1 P'$ gedreht hat, so ist $F_2 F'_2 = 2a . \operatorname{arc} \alpha$, $g = \frac{2ak}{b^2} \cdot \operatorname{arc} \alpha$. Nun läßt sich die von r im Zeitteilchen beschriebene Fläche auch als Kreisausschnitt auffassen, so daß $\frac{r^2}{2} \cdot \operatorname{arc} \alpha = k$, $\operatorname{arc} \alpha = \frac{2k}{r^2}$ und $g = \frac{4ak^2}{b^2} \cdot \frac{1}{r^2}$, in welchem Ausdruck nur r veränderlich ist. Die Bewegung ist also in jedem Zeitteilchen bestimmt durch die bis dahin erlangte Geschwindigkeit v und eine gegen die Sonne gerichtete *Beschleunigung g, die im quadratischen Verhältnis mit der wachsenden Entfernung abnimmt.*

Zweite Abteilung.

Berechnung der Größen der ebenen Geometrie.

III. Abschnitt.

Berechnung von Strecken, Flächen und Bögen.

Siebentes Kapitel.

Strecken und Fläche des Dreiecks und Vierecks.

§ 26. Verhältnisse von Flächen und Inhalts-Berechnung.

1. Wir vergleichen zunächst Rechtecke R und r von gleicher Grundseite g und beliebigen Höhen H und h. Zunächst nehmen wir an, daß diese Höhen ein gemeinsames Maß haben, das sich $x$mal auf H und $y$mal auf h abtragen läßt. Dann kann man durch die Endpunkte dieser Abschnitte Parallelen zu g ziehen und dadurch R in x, r in y kleinere untereinander gleiche Rechtecke s zerlegen (I. Teil § 44, 2). Somit ist:

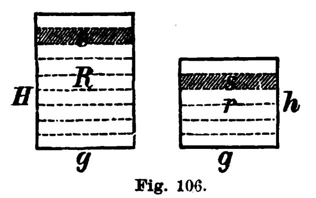


Fig. 106.

$$H : h = x : y = xs : ys = R : r.$$

Haben dagegen die Höhen H und h kein gemeinsames Maß, so ist dies auch für die Rechtecke der Fall; gleichwohl gilt auch für solche die eben aufgestellte Gleichung. Denn angenommen, es ist p der x^{te} Teil von H und geht $y$mal auf h, wobei noch ein kleiner Rest $< p$ übrig bleibt, so ist

$$H = xp \quad \text{und} \quad yp < h < (y+1)\,p,$$

also

$$\frac{yp}{xp} < \frac{h}{xp} < \frac{(y+1)p}{xp}$$

oder

$$\frac{y}{x} < \frac{h}{H} < \frac{y+1}{x}.$$

Zieht man zu g die Parallelen durch die Teilpunkte, so wird das Rechteck R in x gleiche Rechtecke zerlegt, r in g eben solche, wobei noch ein kleineres Rechteck übrig bleibt. Es ist dann $R = xs$, $ys < r < (y+1)\,s$,

also

$$\frac{ys}{xs} < \frac{r}{xs} < \frac{(y+1)s}{xs}$$

oder

$$\frac{y}{x} < \frac{r}{R} < \frac{y+1}{x},$$

so daß $r:R$ wie $h:H$ stets zwischen dieselben Grenzen

$$\frac{y+1}{x} \quad \text{und} \quad \frac{y}{x}$$

fällt. Da man nun deren Unterschied

$$\frac{y+1}{x} - \frac{y}{x} = \frac{1}{x}$$

kleiner machen kann als jede beliebig kleine Zahl — denn es kann die Zahl x der Teile beliebig groß gewählt werden —, so ergibt sich, daß die Verhältnisse $r:R$ und $h:H$ sich um keine meßbare Größe unterscheiden, d. h. es ist $r:R = h:H$.

Wir folgern also:

Die Inhalte von Rechtecken, die in einer Seite übereinstimmen, verhalten sich wie die nichtübereinstimmenden Seiten.

2. Nun vergleichen wir Rechtecke R und r, deren Seiten G, H und g, h nicht übereinstimmen. Hier läßt sich zur Vergleichung ein drittes Rechteck ϱ benutzen, das g und H als Seiten hat. Dann ist:

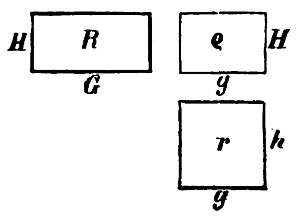


Fig. 107.

$$r:\varrho = h:H, \quad \text{und}$$
$$\varrho:R = g:G.$$

Vervielfacht man diese Verhältnisse miteinander, so folgt:

$$r:R = gh:GH, \qquad \text{d. h.:}$$

Die Inhalte beliebiger Rechtecke verhalten sich wie die Produkte aus (den Maßzahlen von) je zwei aneinander stoßenden Seiten.

3. Ein Parallelogramm ist inhaltsgleich einem Rechteck von gleicher Grundseite und Höhe; ein Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Grundseite und Höhe (I. Teil § 44, 2 und 3). Somit folgern wir aus 1 und 2:

a) *Die Inhalte von Parallelogrammen (Dreiecken) mit gleichen Grundseiten (Höhen) verhalten sich wie ihre Höhen (Grundseiten).*

b) *Die Inhalte von Parallelogrammen (Dreiecken) verhalten sich wie die Produkte aus Grundseite und Höhe.*

Die Aufgabe: *ein Parallelogramm oder Dreieck in gegebenem Verhältnis zu teilen,* wird hiernach mittels Teilung einer Seite gelöst.

4. Dreiecke, die in einem Winkel übereinstimmen, lassen sich so aufeinander legen, daß die Winkel einander decken, wie BAC und B_1AC_1. Zieht man noch B_1C, so verhält sich

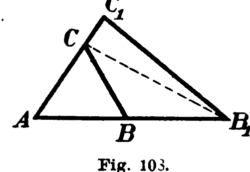


Fig. 108.

$$\triangle BAC : B_1AC = AB : AB_1 \text{ (nach 3)},$$
$$\triangle B_1AC : B_1AC_1 = AC : AC_1;$$

hieraus folgt:

$\triangle BAC : B_1AC_1 = (AB \cdot AC) : (AB_1 \cdot AC_1)$, d. h.:

Die Inhalte von Dreiecken (Parallelogrammen), die in einem Winkel übereinstimmen, verhalten sich wie die Produkte der diesen Winkel einschließenden Seiten.

5. Stimmen zwei Dreiecke in je zwei Winkeln überein, d. h. sind es ähnliche Dreiecke ($\triangle ABC \backsim AB_1C_1$), so kann in der vorletzten Verhältnisgleichung von 4 $AC : AC_1$ durch $AB : AB_1$ ersetzt werden; also verhält sich dann:

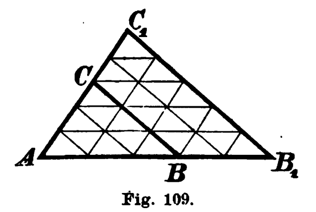


Fig. 109.

$$\triangle BAC : B_1AC_1 = \overline{AB}^2 : \overline{AB_1}^2.$$

In beistehender Figur z. B. verhalten sich die Seiten wie $3 : 5$, die Zahlen der einbeschriebenen gleichen Dreieckchen wie $9 : 25 = 3^2 : 5^2$.

Ähnliche Figuren lassen sich je in gleichviele ähnliche Dreiecke zerlegen, deren entsprechende Seiten untereinander in gleichem Verhältnis stehen; so folgt (mit Berücksichtigung von § 2, 6):

Die Inhalte ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Seiten (oder Strecken).

Zusatz. Aus der Verbindung dieses Satzes mit dem pythagoreischen ergibt sich der folgende:

Beschreibt man über den drei Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks als entsprechenden Seiten ähnliche Figuren, so ist die Fläche der Figur über der Hypotenuse gleich der Summe derer über den beiden Katheten.

6. Um die Größe der Flächen durch Zahlen angeben zu können, vergleicht man dieselbe mit einer als Einheit angenommenen Fläche, der sogenannten Flächeneinheit und mißt, wievielmal diese in jener enthalten ist. Als Flächeneinheit wird am zweckmäßigsten die Fläche eines Quadrates gewählt, dessen Seite gleich der Längeneinheit ist. Der Flächeninhalt wird dann ausgedrückt durch die Zahl der Flächeneinheiten, deren Summe der betreffenden Fläche gleichkommt (vgl. I. Teil § 43, 1—3 und § 47).

Nach 2 läßt sich nun der Inhalt eines Rechtecks leicht angeben. Sind nämlich g und h die Längenzahlen (siehe S. 8, § 1, 8) seiner Grundseite und Höhe, während die der Flächeneinheit 1 und 1 sind, so ist das Verhältnis beider Flächen $g \cdot h : 1 \cdot 1$, d. h. der Flächeninhalt des Rechtecks ist $= gh$.

Man erhält den Inhalt

a) ***eines Rechtecks, indem man zwei benachbarte Seiten desselben miteinander vervielfacht*** (in betreff der Ausdrucksweise siehe § 1, 8);

b) ***eines Quadrates, indem man eine Seite mit sich selbst vervielfacht.***

Hieraus fließen in Verbindung mit den Sätzen im I. Teil § 44, 2a, 3a und 4 die folgenden Sätze:

Man erhält den Inhalt

c) ***eines Parallelogramms, indem man die Grundseite mit der Höhe vervielfacht;***

d) ***eines Dreiecks, indem man die halbe Grundseite mit der Höhe vervielfacht;***

e) ***eines Trapezes, indem man die Höhe mit der halben Summe der beiden Parallelen (oder mit der Mittelparallelen) vervielfacht.***

§ 27. Berechnung von Strecken und der Fläche eines Dreiecks und eines Sehnenvierecks.

1. Im rechtwinkeligen Dreieck (Fig. 110a) sei die größte Seite c, die beiden andern $= a$ und b, die Höhe auf c sei $= h$ und die Abschnitte der größten Seite seien $= p$ und q. Dann folgt aus § 8, 2, 3 und 4 (S. 23):

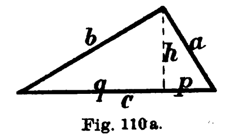


Fig. 110a.

1) $a^2 = pc, \quad b^2 = qc,$

2) $h^2 = pq,$

3) $ch = ab$ (doppelter Flächeninhalt),

4) $a^2 + b^2 = c^2,$

wonach aus zwei gegebenen Größen die andern berechnet werden können.

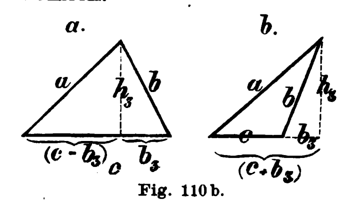


Fig. 110b.

2. Auf das schiefwinkelige Dreieck läßt sich der pythagoreische Lehrsatz anwenden, indem man die Höhe $h_3 \perp c$ zieht; der an die Seite a nicht angrenzende Abschnitt sei b_3, dann ist der angrenzende $= c \mp b_3$, und es ergibt sich:

$$a^2 = (c \mp b_3)^2 + h_3{}^2 = c^2 \mp 2\,cb_3 + b_3{}^2 + h_3{}^2,$$

während $$b_3{}^2 + h_3{}^2 = b^2;$$

somit ist $$a_2 = b^2 + c^2 \mp 2\,cb_3.$$

Dies ist der sogenannte allgemeine pythagoreische Lehrsatz für das schiefwinkelige Dreieck (vgl. I. Teil § 44, 10):

In einem Dreieck ist das Quadrat der Gegenseite eines spitzen (stumpfen) Winkels gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten vermindert (vermehrt) um das doppelte Produkt aus einer dieser Seiten und ihrem Abschnitt unter der anderen.

3. Berechnung der Höhen und des Flächeninhalts eines Dreiecks aus den Seiten. — Aus der eben abgeleiteten Formel

folgt:
$$b_3 = \pm \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Daher ist:

$$h_3^2 = b^2 - b_3^2 = (b + b_3)(b - b_3) = \left(b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)\left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)$$
$$= \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4c^2};$$

also ist

$$4c^2h_3^2 = [(b + c)^2 - a^2]\,[a^2 - (b - c)^2]$$
$$= (b + c + a)(b + c - a)(a - b + c)(a + b - c).$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$a + b + c \qquad = 2s, \qquad \text{so ist:}$$
$$-a + b + c = a + b + c - 2a = 2s - 2a = 2(s - a),$$

und wird $(s - a) = s_1$, $(s - b) = s_2$, $(s - c) = s_3$ gesetzt, so findet sich:

$$4c^2h_3^2 = 2s \cdot 2s_1 \cdot 2s_2 \cdot 2s_3,$$
$$h_3^2 = \frac{4ss_1s_2s_3}{c^2},$$
$$h_3 = \frac{2}{c}\sqrt{ss_1s_2s_3}.$$

Dies eingesetzt in die Inhaltsformel $J = \frac{c}{2} \cdot h_3$ gibt als

Inhalt des Dreiecks $J = \sqrt{ss_1s_2s_3}$,

d. i. die sogenannte Heronische Formel.

Beispiel:	Gegeben:	Berechnet:	
	$a = 13$	$s = 21$	$J = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}$
	$b = 14$	$s_1 = 8$	$= \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3}$
	$c = 15$	$s_2 = 7$	$= \sqrt{3^2 \cdot 7^2 \cdot 4^2}$
also:	$2s = 42$	$s_3 = 6$	$= 3 \cdot 7 \cdot 4 = 84.$

Zusatz. Ist das Dreieck gleichseitig, so ist

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3};$$

somit ergibt sich als ***Inhalt des gleichseitigen Dreiecks***

$$J = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}.$$

4. Berechnung der Schwerlinien und Winkelhalbierenden im Dreieck. — Die Strecke e eines beliebigen Eckstrahles von ab aus nach der Gegenseite c teile diese in die Abschnitte p und q; die Höhe zu c begrenze den an c angrenzenden Abschnitt x. Dann ist

im Dreieck aep: $a^2 = e^2 + p^2 - 2px$

im Dreieck beq: $b^2 = e^2 + q^2 + 2qx$;

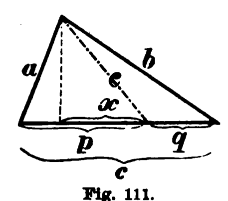


Fig. 111.

nun vervielfacht man die erste Gleichung mit q, die zweite mit p und zählt zusammen:

$$a^2q + b^2p = e^2(q + p) + pq(p + q) = e^2c + pqc,$$

woraus: $$e^2 = \frac{a^2q + b^2p}{c} - pq.$$

a) Für die Schwerlinie $e = m_3$ ist

$$p = q = \frac{c}{2}, \quad \text{also:} \quad m_3^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

b) Für die Winkelhalbierende w_3 ist (S. 20, § 7, 2)

$$p : q = a : b \quad \text{und} \quad p + q = c;$$

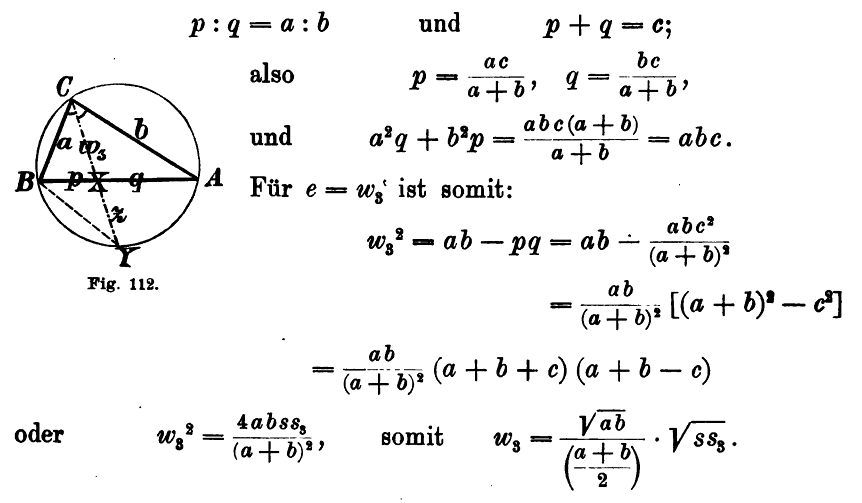


Fig. 112.

also $$p = \frac{ac}{a+b}, \quad q = \frac{bc}{a+b},$$

und $$a^2q + b^2p = \frac{abc(a+b)}{a+b} = abc.$$

Für $e = w_3$ ist somit:

$$w_3^2 = ab - pq = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2}$$

$$= \frac{ab}{(a+b)^2}[(a+b)^2 - c^2]$$

$$= \frac{ab}{(a+b)^2}(a+b+c)(a+b-c)$$

oder $$w_3^2 = \frac{4abss_3}{(a+b)^2}, \quad \text{somit} \quad w_3 = \frac{\sqrt{ab}}{\left(\frac{a+b}{2}\right)} \cdot \sqrt{ss_3}.$$

Auch durch Benutzung des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises und der ähnlichen Dreiecke $BCY \backsim XCA$ (Fig. 112) ergibt sich:

$$w_3 : b = a : (w_3 + z), \quad w_3^2 = ab - w_3z = ab - pq.$$

5. Berechnung des Halbmessers des Dreiecksumkreises. — Wenn CX (Fig. 113) ein Durchmesser des Kreises, so ist

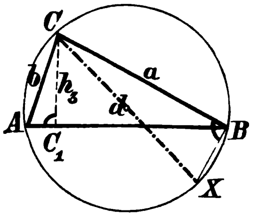


Fig. 113.

$$\sphericalangle CXB = CAB,$$

$$\sphericalangle XBC = R = AC_1C,$$

somit $\triangle XCB \backsim ACC_1$,

also $d : a = b : h_3$,

woraus $\frac{d}{2}$ oder $r = \frac{ab}{2h_3}$,

und da $h_3 = \frac{2J}{c}$, so ist ***der Halbmesser des Dreiecksumkreises***

$$r = \frac{abc}{4J},$$

wo J nach 3 durch die Heronische Formel zu ersetzen ist.

6. Berechnung der Halbmesser des Inkreises und der Ankreise eines Dreiecks. — a) Nach I. § 35, 2 ist (Fig. 114):

$$AF = s_1 = s - a, \qquad BF_1 = s_3 = s - c,$$
$$FB = s_2 = s - b, \qquad AF_1 = s.$$

Weil $\triangle AMF \backsim AM_1F_1$, so ist: $\varrho : s_1 = \varrho_1 : s$,

und weil $\triangle FMB \backsim F_1BM_1$, so ist: $\varrho : s_2 = s_3 : \varrho_1$;

hieraus folgt durch Vervielfachung und Teilung:

$$\varrho^2 : s_1 s_2 = s_3 : s \quad \text{und} \quad s_2 : s_1 = \varrho_1^2 : s s_3,$$

also ***der Halbmesser des Dreiecksinkreises***

$$\varrho = \sqrt{\frac{s_1 s_2 s_3}{s}} \quad \text{oder} \quad \varrho = \frac{J}{s};$$

ferner $\varrho_1 = \sqrt{\frac{s s_2 s_3}{s_1}}$, und entsprechend $\varrho_2 = \sqrt{\frac{s s_1 s_3}{s_2}}$ und $\varrho_3 = \sqrt{\frac{s s_1 s_2}{s_3}}$.

b) Übrigens ergibt sich auch leicht aus der Betrachtung der Figur, daß

$$\triangle ABC = AMB + BMC + CMA$$

ist, also

$$J = \frac{\varrho}{2}(a + b + c) = \varrho s,$$

$$\varrho = \frac{J}{s}.$$

Fig. 114.

In ähnlicher Weise folgt:

$$\varrho_1 = \frac{J}{s_1}, \quad \varrho_2 = \frac{J}{s_2}, \quad \varrho_3 = \frac{J}{s_3}.$$

7. Die Eckenlinien im Sehnenviereck. — a) Trägt man im Sehnenviereck $ABCD$ die Seite DC von A aus als Sehne AK in den Kreis und verbindet K mit B, so entstehen über der Eckenlinie AC zwei Dreiecke ALB und LCB, die den an der andern Eckenlinie BD angrenzenden Dreiecken DCB und ADB ähnlich sind, wie sich aus der Übereinstimmung der Umfangswinkel zu gleichen Bogen ergibt. Hieraus folgt nun:

$$AL : a = c : e, \qquad e \cdot AL = ac$$

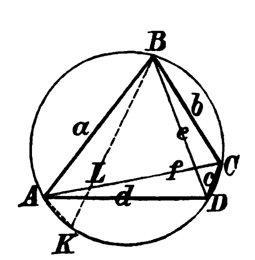


Fig. 115.

$$LC : b = d : e, \qquad e \cdot LC = bd$$

also
$$e\,(AL + LC) = ac + bd,$$
$$\boldsymbol{e \cdot f = ac + bd}, \qquad \text{d. h.:}$$

Im Sehnenviereck ist das Produkt der beiden Eckenlinien gleich der Summe der Produkte der Gegenseiten. (Ptolemäischer Lehrsatz 150 n. Chr.)

b) Dieser Satz läßt sich zur Berechnung der Eckenlinien verwenden. Im Sehnenviereck $ABCK$ ist nämlich:

$$AC \cdot BK = AB \cdot CK + BC \cdot AK$$

oder
$$f \cdot BK = ad + bc,$$

weil $AK = c$ und $CK = d$ ist.

Wird das Sehnenviereck mit der Reihenfolge der Strecken $acbd$ gebildet, so ist die von ac überspannte Eckenlinie $= BK$, die von cb überspannte $= e$, somit ist:

$$e \cdot BK = ab + cd.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit der vorigen liefert die folgende:

$$f : e = (ad + bc) : (ab + cd),$$

und diese letztere in Verbindung mit der Gleichung in a) gibt:

$$f^2 = \frac{ad + bc}{ab + cd}(ac + bd)$$

$$e^2 = \frac{ab + cd}{ad + bc}(ac + bd).$$

8. Um den Flächeninhalt eines Sehnenvierecks aus seinen vier Seiten a, b, c, d zu berechnen, zerlegen wir dasselbe durch die Eckenlinie e in zwei Dreiecke und betrachten die Gegenseiten b und d als Grundseiten. Dann ist

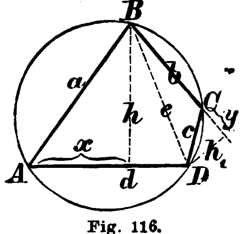


Fig. 116.

$$J = \frac{d \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h_1}{2};$$

weil aber die Winkel bei A und C einander zu $2R$ ergänzen, so ist

$$h_1 = \frac{ch}{a}, \qquad \text{folglich} \qquad J = \frac{ad + bc}{2} \cdot \frac{h}{a}.$$

Um h zu erhalten, wenden wir auf e zweimal die Formel in 2 an:

$$e^2 = a^2 + d^2 - 2dx = b^2 + c^2 + 2by,$$

und da
$$y = \frac{cx}{a},$$

so ist
$$(a^2 + d^2) - (b^2 + c^2) = \frac{2x}{a}(ad + bc),$$

woraus $$x = \frac{a}{2(ad+bc)}[(a^2+d^2)-(b^2+c^2)].$$

Nun ist $$h^2 = (a+x)(a-x)$$

und $$a \pm x = \frac{a}{2(ad+bc)}[2(ad+bc) \pm (a^2+d^2) \mp (b^2+c^2)],$$

also $$a + x = \frac{a}{2(ad+bc)}[(a+d)^2-(b-c)^2],$$

$$a - x = \frac{a}{2(ad+bc)}[-(a-d)^2+(b+c)^2];$$

deshalb wird

$$h = \frac{a}{2(ad+bc)}[(a+d)^2-(b-c)^2]\cdot[(b+c)^2-(a-d)^2].$$

Demnach ergibt sich

$$J = \tfrac{1}{4}\sqrt{[(a+d)^2-(b-c)^2][(b+c)^2-(a-d)^2]}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+d-b+c)(a+d+b-c)(b+c+a-d)(b+c-a+d)}.$$

Setzt man $a+b+c+d = 2s$,
so findet sich schließlich als Inhalt J des Sehnenvierecks:

$$J = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

§ 28. Zeichnung von Rechnungsausdrücken für Strecken und Flächen.

1. Die Summen und Unterschiede von Strecken, $a+b+c$, $a+b-c$, das Vielfache va oder ein Bruchteil $\frac{v}{n}a$ einer Strecke a (S. 18, § 6, 2) stellen ebenfalls Strecken dar, die dem betreffenden Rechnungsausdruck entsprechen (wobei v und n reine Zahlen sind). Jeder *Rechnungsausdruck* mit Strecken, *der wieder eine Strecke darstellt,* heißt ein *Längenausdruck* oder *Ausdruck einfacher Ausdehnung* (*erster Dimension*).

Auch das *Produkt zweier Strecken* (dessen Faktoren die Längenzahlen zweier Strecken sind) läßt sich geometrisch deuten als die *Fläche* des Rechtecks, dessen Seiten die beiden Strecken sind, und von solchen Produkten lassen sich (algebraische) Summen, Vielfache und Bruchteile bilden, *die* wieder *eine Fläche darstellen;* alle solche Rechenausdrücke heißen *Flächenausdrücke* oder *Ausdrücke zweifacher Ausdehnung (zweiter Dimension).* — Im Gegensatz hierzu heißen *reine* (unbenannte) Zahlen auch *Verhältniszahlen* oder *Zahlen ohne Ausdehnung* (nullter Dimension). Eine solche Zahl ist der Quotient zweier Strecken. — Ausdrücke mit 3 Streckenfaktoren kommen bei der Berechnung der *Körper* in Betracht und sind von *dreifacher Ausdehnung (dritter Dimension)* (vgl. III. Teil).

Die Zeichnung von Summen und Unterschieden von Strecken wurden im I. Teil § 6 erläutert, ebenso die von Flächen I. Teil § 43, 5 und § 44, 7, 10, 12—15. Da nur gleichartige Größen zusammengezählt werden können,



so folgt der Satz, der zur Entdeckung von Fehlern in einer Rechnung dienen kann:

In einer Summe von Ausdrücken müssen alle Glieder von gleichem Grad der Ausdehnung sein.

Summen und Unterschiede von Strecken werden bei dem *logarithmischen Rechenschieber* und der *Rechentafel* benutzt. Bei jenem werden entweder geteilte Lineale (oder Scheiben) gegeneinander verschoben, auf welchen die Strecken (Bogen) den Logarithmen der beigesetzten Zahlen entsprechen, so daß die Summe oder der Unterschied dieser Strecken (Bogen) je einem Vervielfachen oder Teilen der betreffenden Zahlen entspricht. — Bei den Rechentafeln werden die fraglichen Größen durch Zeichnung in einer Tafel dargestellt und mit einem Netz von Linien bedeckt, so daß das Auge, indem es diesen Linien folgt, das gewünschte Ergebnis findet.

Eine Zeichnung zur Bestimmung von Größen ist dann von Vorteil, wenn letztere von gezeichneten Strecken, Winkeln, Flächen abhängen, wie dies in Geometrie und Mechanik der Fall ist. Die fraglichen Größen werden durch Zeichnungen bestimmt, die den Rechnungen entsprechen graphisches Rechnen, Culmann 1864).

A. Ausdrücke für Strecken.

2. a) Wenn a, b, c drei Strecken sind, so stellt der Ausdruck $x = \frac{ab}{c}$ das Produkt einer Strecke a mit einer Verhältniszahl $\frac{b}{c}$ dar, entspricht also einer Strecke; diese wird (nach S. 16, § 6) gezeichnet als viertes Glied der Gleichung $c : b = a : x$.

Zusatz. Eine Verhältniszahl $x = \frac{a}{b}$ läßt sich mit einem in Zehntel und Hundertel geteilten Maßstab als Dezimalbruch bestimmen, indem man zeichnet $b : a = 1 : x$. Nimmt man z. B. 1 dm als Maß, so geben die mm den Bruch x auf 2 Dezimalen.

b) Sollen mehrere Strecken a_1, a_2, a_3 mit derselben Verhältniszahl vervielfacht werden: $x_1 = \frac{b}{c} a_1$, $x_2 = \frac{b}{c} \cdot a_3$ (wie dies beim Zeichnen ähnlicher Figuren vorkommt), so zeichnet man zunächst gemäß der ersten Gleichung $c : b = a_1 : x$ und trägt dann an Stelle von a_1 oder neben a_1 in die Zeichnung a_2, a_3 ein, so daß sich die Grenzpunkte von $a_1 a_2 a_3$ und $x_1 x_2 x_3$ als ähnliche Punktreihen ergeben (gemäß § 5, 2 oder 5, S. 15).

Zusatz. Eine andere Lösung, die nur einfache Abmessungen mit dem Zirkel erfordert, stützt sich auf § 17, 1, (S. 48). Man teilt eine Strecke $B_1 B$ (Fig. 55) harmonisch im Verhältnis $c : b$, $B_1 A : AB = - B_1 A_1 : A_1 B = c : b$, beschreibt um den Abstand der Teilpunkte AA_1 als Durchmesser einen Kreis und trägt nun jede gegebene Strecke a_1 vom Anfangspunkt B_1 jener Strecke bis zur Kreislinie S; der Abstand SB des so erhaltenen Punktes der Kreislinie vom Endpunkt der Strecke gibt die dem Verhältnis entsprechende Strecke.



3. Ein Bruch, dessen Zähler und Nenner aus Faktoren zusammengesetzt ist, die Längen darstellen, $\frac{abcd}{ef}$, läßt sich in soviel Verhältniszahlen zerlegen, als Längen im Nenner stehen, $\frac{a}{e} \cdot \frac{b}{f} \cdot cd$; der Ausdehnungsgrad ist dann durch den Überschuß in der Anzahl der Längenzahlen des Zählers bestimmt. So ist z. B. der Ausdruck $\frac{abcd}{ef}$ von zweifacher Ausdehnung; $\frac{abcd}{efg}$ ist dagegen eine Länge.

Soll das Produkt aus einer Strecke a mit mehreren Verhältniszahlen

$$x = \frac{b_1}{c_1} \cdot \frac{b_2}{c_2} \cdot \frac{b_3}{c_3} \cdot a$$

bestimmt werden, so zeichnet man (gemäß 2a) der Reihe nach die Strecken, x_1, x_2, x der Art, daß

$$x_1 = \frac{b_1}{c_1} \cdot a\,, \quad x_2 = \frac{b_2}{c_2} \cdot x_1\,, \quad x = \frac{b_3}{c_3} \cdot x_2\,,$$

woraus sich durch Vervielfachen die Richtigkeit der Zerlegung ergibt.

Zusatz. Dies kann auch auf folgende Weise ausgeführt werden. Man trägt vom Scheitel S (Fig. 117) zweier Geraden p und q die Zähler abwechselnd auf die eine und andere Gerade, b_1 und b_3 auf p, b_2 auf q, umgekehrt die Nenner c_1 und c_3 auf q, c_2 auf p und verbindet die Endpunkte der zusammengehörigen Zähler und Nenner. Auf dieselbe Gerade mit dem ersten Nenner c_1 trägt man $SA = a$ ab und beschreibt von dem Endpunkt A einen Geradenzug, dessen Seiten mit jenen Verbindungsgeraden der Reihe nach parallel sind und dessen Ecken abwechselnd auf q und p liegen. Dann ist $SA_1 = x_1$, $SA_2 = x_2$, $SA_3 = x$.

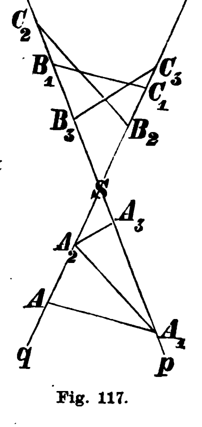


Fig. 117.

Sind die Verhältnisse

$$\frac{b_3}{c_3}\,, \; \frac{b_2}{c_2}\,, \; \frac{b_1}{c_1}$$

einander gleich, so treten an die Stelle der Verbindungsgeraden

$$B_1C_1\,, \; B_2C_2\,, \; B_3C_3$$

zwei gewendet parallele Gerade.

4. a) Das Zeichnen des geometrischen Mittels zwischen zwei Strecken $a : x = x : b$, oder der Seite eines Quadrates von gegebenem Inhalt $x^2 = ab$ (S. 27, § 10, 1), entspricht dem Ausziehen der Quadratwurzel $x = \sqrt{ab}$; dieser Ausdruck ist also von einfacher Ausdehnung. Irrationale Wurzeln

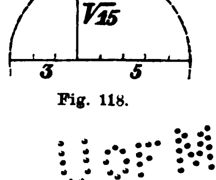


Fig. 118.

werden hierbei durch Strecken dargestellt, welche mit der angewendeten Einheit kein gemeinschaftliches Maß haben (S. 6, § 1, 5), z. B. (Fig. 118):

$$x = \sqrt{15} = \sqrt{3 \cdot 5}, \qquad 3 : x = x : 5.$$

Die Quadratwurzel eines Ausdruckes von zweifacher Ausdehnung ist eine Strecke.

b) Um insbesondere die Seite eines Quadrates zu bestimmen, das gleich einem Bruchteil eines Quadrates ist,

$$x^2 = \frac{p}{q} a^2 = \frac{p}{q} a \cdot a, \quad x = a\sqrt{\frac{p}{q}}$$

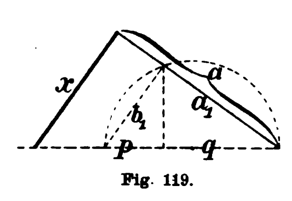


Fig. 119.

wird das Mittelglied x zu $\frac{p}{q} a$ (2a) und a gezeichnet.

Oder man zeichnet ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Hypotenuse aus den Abschnitten p und q besteht, und dann ein ähnliches Dreieck mit den Katheten a (an q angrenzend) und x. Es verhält sich nämlich $x^2 : a^2 = b_1^2 : a_1^2$, d. i. $= p\,(p+q) : q\,(p+q)$ also $= p : q$.

c) Ebenso wird die Wurzel von jedem Produkt zweifacher Ausdehnung behandelt, z. B. von

$$\frac{b_1}{c_1}\frac{b_2}{c_2} \cdot ab = \frac{b_1}{c_1} a \cdot \frac{b_2}{c_2} b = y \cdot z = x^2,$$

indem man durch Anwendung von 2a zunächst y und z und dann durch Zeichnung des geometrischen Mittels x erhält.

5. a) Die Wurzel aus der Summe oder dem Unterschied von Flächenausdrücken, welche in Form von Quadraten gegeben sind, wird mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes erhalten. Es ist dies die Darstellung des Ausdruckes

$$x = \sqrt{a^2 \pm b^2},$$

wobei im ersten Fall a und b Katheten und x Hypotenuse, im zweiten Fall a Hypotenuse, b und x Katheten sind.

Die Summe mehrerer solcher Glieder wird durch die wiederholte Anwendung dieses Verfahrens erhalten. Soll z. B.

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2 + d^2}$$

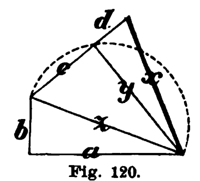
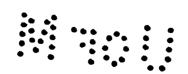


Fig. 120.

sein, so wird zunächst $z^2 = a^2 + b^2$ gezeichnet, dann $y^2 = z^2 - c^2$ u. s. w.

b) Sind hierbei statt Quadrate irgend welche Größen zweifacher Ausdehnung zusammenzuzählen, so kann man für jede derselben (nach 4) die Seite des entsprechenden Quadrats bestimmen und dann, wie eben gezeigt, verfahren. Also z. B.:



$x^2 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = y^2 + z^2 + u^2, \quad y^2 = a_1 b_1, \quad z^2 = a_2 b_2, \quad u^2 = a_3 b_3.$
Oder man stellt diese Größen als Rechtecke mit einer gemeinsamen Seite dar (nach 2a) und wendet hierauf 4a an:

$$x^2 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = c(x_1 + x_2 + x_3)$$

wobei $\quad x_1 = \frac{a_1 b_1}{c}, \quad x_2 = \frac{a_2 b_2}{c}, \quad x_3 = \frac{a_3 b_3}{c}.$

Zusatz. Statt dessen trägt man auch a_1, a_2, a_3 als aufeinanderfolgende Strecken einer Punktreihe $OA_1A_2A_3$ an, zieht in beliebiger Richtung $OS = c$ und zeichnet von S als Strahlpunkt den zu dieser Punktreihe gehörigen Büschel. Auf dem Strahl OS trägt man b_1, b_2, b_3 als Strahlstrecken von O einer Punktreihe $OB_1B_2B_3$ an und zieht durch deren Punkte Parallele zu OA_1. Schließlich zeichnet man einen Geradenzug $OB_1\beta_2\beta_3X_3$, dessen Geraden der Reihe nach parallel den Strahlen jenes Büschels von S und dessen Ecken auf den Parallelen der zweiten Punktreihe liegen. Die Seiten dieses Geradenzugs schneiden OA in den Endpunkten $X_1X_2X_3$ der aufeinander folgenden Strecken x_1, x_2, x_3. Denn es ist z. B., wenn SM die Verlängerung von A_2S,

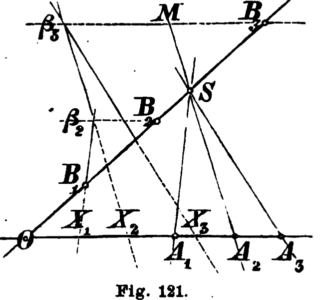


Fig. 121.

$$\frac{X_2X_3}{A_2A_3} = \frac{X_2\beta_3}{A_2S} = \frac{A_2M}{A_2S} = \frac{OB_3}{OS}$$

oder
$$X_2X_3 = \frac{b_3}{c} a_3.$$

c) Mit Hilfe der Sätze über die Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis (S. 25, § 9,6) läßt sich auch eine Fläche b^2 als Summe oder Unterschied eines Quadrates x^2 und eines Rechtecks ax darstellen, welche eine Seite x gemeinsam haben, während nur die andere Seite a des Rechtecks gegeben ist. Es entspricht dies der Auflösung der Gleichungen vom zweiten Grad:

a) $x^2 + ax = b^2$, $\quad$ b) $x^2 - ax = b^2$, $\quad$ c) $ax - x^2 = b^2$.

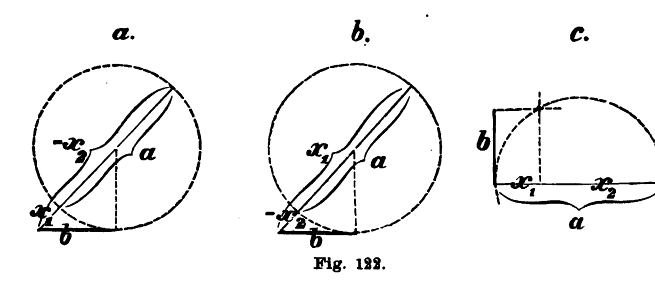


Fig. 122.



Dann ist im ersten Fall:

$$x(x + a) = b^2, \qquad (a + x) : b = b : x,$$

im zweiten Fall:

$$x(x - a) = b^2, \qquad x : b = b : (x - a),$$

im dritten Fall:

$$x(a - x) = b^2, \qquad x : b = b : (a - x),$$

Man beschreibt mit a als Durchmesser einen Kreis und trägt in den ersten beiden Fällen b als Berührende an; dann ergibt sich auf der Geraden vom Mittelpunkt nach dem Endpunkt von b der positive (und negative) Wert für x. Im dritten Fall sind die beiden Werte von x die Abschnitte des Durchmessers, welche zur Halbsehne b gehören.

Die negativen Werte von x in der Gleichung

$$x^2 + ax = -b^2$$

findet man, wenn man $y = -x$ aus

$$y^2 - ay = -b^2 \qquad \text{oder} \qquad ay - y^2 = b^2$$

nach c) zeichnet.

Ist statt b^2 der Wert $b \cdot c$ gegeben, so erfährt die Zeichnung eine Abänderung gemäß § 9, 2 (S. 25).

B. Ausdrücke für Flächen.

6. Um einen Bruchteil c einer Fläche zu erhalten, kann man sie in ein Rechteck (oder Dreieck) verwandeln (I. Teil § 45, 1—4) mit den Seiten a und b. Man erhält dann die Fläche $\frac{c}{d} \cdot ab$, indem man von der Seite a den entsprechenden Bruchteil zeichnet, $d : c = a : x$, und im Endpunkt von x die Parallele zur andern Seite zieht (im Dreieck die Verbindungsgerade zur Gegenecke von a) (§ 26, 1 und 3).

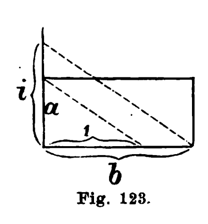
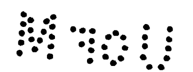


Fig. 123.

7. a) Das Produkt zweier Strecken ab oder der Inhalt eines Rechtecks, dessen Seiten a und b sind, kann durch Längenmessung bestimmt werden, indem man aus diesen Strecken und der Längeneinheit 1 die Strecke i so bestimmt, daß $1 \cdot i = ab$, $1 : a = b : i$; die Zahl der Längeneinheiten von i gibt dann die Zahl der Flächeneinheiten des Rechtecks.

b) Soll der Inhalt eines Dreiecks durch Längenmessung ermittelt werden, $i = \frac{ah}{2}$, so bestimmt man i ebenso aus $2 : a = h : i$, wobei 2 die Strecke von zwei Längeneinheiten bedeutet. Oder man verwandelt das Dreieck in ein solches, dessen Grundseite 2 und dessen



Höhe i ist (Fig. 124a), oder dessen Höhe 2 und dessen Grundseite i ist (Fig. 124b, c).

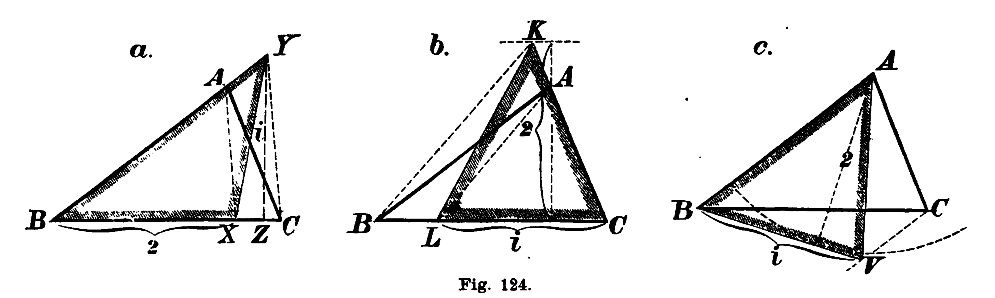


Fig. 124.

Um den Flächeninhalt eines Vielecks durch Längenmessung zu bestimmen, wird es zuvor in ein Dreieck verwandelt (I. Teil § 45, 3).

8. Das Verhältnis zweier Flächen oder Größen von zweifacher Ausdehnung läßt sich durch ein Streckenverhältnis ersetzen, indem man erstere zunächst als Quadrate darstellt $a^2 : b^2$ (4a) und aus deren Seiten a und b als Katheten ein rechtwinkeliges Dreieck formt. Die Abschnitte a_1 und b_1 auf der Hypotenuse geben das fragliche Verhältnis

$$a^2 : b^2 = a_1 : b_1 \text{ (vgl. 4 b).}$$

Fig. 125.

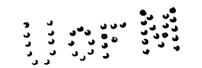
9. Wird in dem Ausdruck für die Summe der Rechtecke in 5b $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = c(x_1 + x_2 + x_3)$ das $c = 1$ gewählt, so gibt die Zahl der Längeneinheiten von $(x_1 + x_2 + x_3)$ die fragliche Summe von Ausdrücken zweifacher Ausdehnung.

§ 29. Lösung von Aufgaben durch Zeichnung nach der Rechnung.

Pythagoreische Zahlendreiecke.

1. Bei geometrischen Aufgaben handelt es sich häufig darum, eine Strecke zu bestimmen, mit deren Hilfe die Aufgabe gelöst werden kann. Man sucht dann den Zusammenhang der fraglichen Strecke mit den gegebenen Stücken durch eine Gleichung auszudrücken, berechnet sie aus dieser Gleichung und führt hierauf die Zeichnung des erhaltenen Ausdrucks aus nach § 28.

Ein negativer Wert der Unbekannten hat hierbei nur dann eine Bedeutung, wenn in der Aufgabe die Lage der fraglichen Strecke nach zwei entgegengesetzten Richtungen in Betracht gezogen werden kann; andernfalls ist ein negativer Wert ein Anzeichen der Unmöglichkeit der Lösung. — Ist die Gleichung vom zweiten Grad (vgl. § 28, 5c), so gibt oft eine weitere Bedingung, der die fragliche Strecke genügen muß, an, welcher der beiden Werte allein zu benutzen ist. Diese weitere Bedingung besteht gewöhnlich darin, daß die fragliche Strecke innerhalb gewisser Grenz-



werte liegen muß. Manchmal entsprechen die im betreffenden Fall ausgeschlossenen Werte einer andern Auffassung der Aufgabe oder einer verwandten Aufgabe. — Ein imaginärer Wert zeigt die Unmöglichkeit der Lösung unter den gegebenen Bedingungen an.

2. Aufgabe. *Der Umfang eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite $= a$, soll durch eine Parallele zur einen Seite halbiert werden.* —

Erste Lösung: Die Parallele schneide auf der einen Seite einen unteren Abschnitt $= x$ ab; dann ist der obere $= (a - x)$. Folglich muß sein:

$$x + x + a = (a - x) + (a - x), \qquad \text{woraus} \qquad x = \frac{a}{4}.$$

Zweite Lösung: Die Parallele schneide auf der einen Seite einen oberen Abschnitt $= y$ ab; dann ist der untere $= (a - y)$. Folglich muß sein:

$$2y = 2(a - y) + a, \qquad \text{woraus:} \qquad y = \frac{3a}{4}.$$

3. Aufgabe. *Der Umfang $(a + b + c)$ eines Dreiecks soll parallel zu einer Seite a halbiert werden.* Sind x und y die oberen Abschnitte von b und c, so ist

$$x + y = \tfrac{1}{2}(a + b + c), \qquad x : y = b : c,$$

woraus folgt
$$x = \frac{(a + b + c)b}{2(b + c)},$$

was nach § 28, 2a zu zeichnen ist.

4. Aufgabe: *Gegeben ist ein Rechteck; man soll ein Quadrat suchen derart, daß die Flächen beider Figuren sich wie ihre Umfänge verhalten.* — Die Rechteckseiten seien a und b, die gesuchte Quadratseite $= x$. Dann muß:

$$x^2 : ab = 4x : 2(a + b), \qquad \text{woraus} \qquad x = \frac{2ab}{a + b}.$$

Eine Art der Zeichnung siehe S. 22, § 7, 7.

5. Aufgabe. *Ein Dreieck soll in ein inhaltsgleiches gleichseitiges Dreieck verwandelt werden.* — Die Grundseite und Höhe des gegebenen Dreiecks seien g und h, die des gesuchten x und y, so ist $g \cdot h = x \cdot y$. In einem gleichseitigen Dreieck ist aber (S. 95, § 27, 3. Zus.)

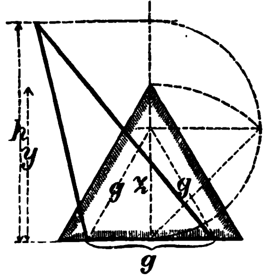


Fig. 126.

$$y = \frac{x}{2}\sqrt{3}, \qquad x = \frac{2y}{\sqrt{3}};$$

somit ist

$$gh = \frac{2y^2}{\sqrt{3}}, \; y^2 = h \cdot \frac{g}{2}\sqrt{3}, \quad \frac{g}{2}\sqrt{3} : y = y : h.$$



Nun erhält man $z = \frac{g}{2}\sqrt{3}$ als Höhe eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite g ist, und hieraus y.

6. Aufgabe. *Man soll ein Dreieck parallel zu einer Seite in einem gegebenen Verhältnis $p:q$ teilen.* — Wenn x die fragliche Seite des abzuschneidenden Dreiecks ist, welche auf die Seite a des gegebenen Dreiecks fällt, so muß nach § 26, 5 das Verhältnis bestehen:

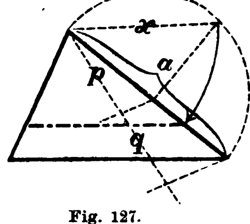


Fig. 127.

$$x^2 : a^2 = p : (p+q),$$

$$x^2 = \frac{p}{(p+q)}\, a \cdot a,$$

hieraus
$$\frac{p}{p+q}\, a : x = x : a.$$

Man teilt also a im Verhältnis $p:(p+q)$ und zeichnet dann x gemäß dieser Gleichung.

7. Aufgabe. *Man soll ein Trapez parallel zu den Grundseiten in gegebenem Verhältnis $p:q$ teilen.* — Es seien B und C die beiden Teile derart, daß $B : C = p : q$ (z. B. $5:2$). Man ergänzt das Trapez durch das Dreieck A zu einem Dreieck; wenn dann a, x, b die entsprechenden Seiten der ähnlichen Dreiecke

$$A, \quad (A+B), \quad (A+B+C)$$

sind, so verhält sich

Fig. 128.

$$(A+B) : A = x^2 : a^2,$$

also:
$$\frac{B}{A+B} = \frac{x^2 - a^2}{x^2};$$

ferner:
$$(A+B):(A+B+C) = x^2 : b^2, \quad \text{also:} \quad \frac{A+B}{C} = \frac{x^2}{b^2 - x^2}$$

Aus beiden folgt:
$$\frac{B}{C} = \frac{x^2 - a^2}{b^2 - x^2} = \frac{p}{q},$$

$$\frac{x^2 - a^2}{b^2 - a^2} = \frac{p}{p+q}.$$

Wird noch
$$y^2 = x^2 - a^2$$
gesetzt,

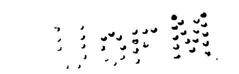
so ist:
$$\sqrt{b^2 - a^2} : y = y : \frac{p}{p+q}\sqrt{b^2 - a^2}.$$

Zeichnet man daher aus b und a das rechtwinkelige Dreieck QRS, so ist die Seite
$$QS = \sqrt{b^2 - a^2};$$

teilt man letztere im gegebenen Verhältnis:
$$QV : VS = p : q$$

und zeichnet das geometrische Mittel y zu QV und QS, so erhält man dann

$$x = \sqrt{a^2 + y^2}.$$



Löst man dagegen obige Gleichung auf, so führt dies zur Zeichnung von
$$x^2 = \frac{pb^2}{p+q} + \frac{qa^2}{p+q}.$$

8. Aufgabe. *Durch einen gegebenen Punkt P ist eine Gerade zu ziehen, die mit den Schenkeln eines nach Lage und Größe gegebenen Winkels O ein Dreiseit von bestimmtem Flächeninhalt J bildet.* Die gegebene Fläche läßt sich darstellen (Fig. 129) als ein Parallelogramm $OQRS$, dem der gegebene Winkel angehört und in dem der gegebene Punkt P auf einer Seite RS liegt; er teile diese Strecke in $RP = a$ und $PS = b$. Ist XPY die fragliche Gerade, die QR in Z treffe, so muß
$$\triangle RPZ = SPY + XQZ$$
sein, (oder $\triangle RPZ_1 = SPY_1 + X_1QZ_1$),
somit nach § 26,6, Zus.
$$QX^2 = a^2 - b^2, \qquad QX = \pm\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Die entgegengesetzten Zeichen entsprechen den entgegengesetzten Richtungen, in denen QX von Q aus angetragen werden kann; beide Lösungen sind also zulässig. Wenn P im Winkelraum selbst liegt (Fig. 129 a), so fällt stets X_1 zwischen O und Q, da $\sqrt{a^2 - b^2} < a + b$.

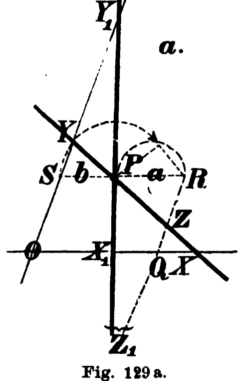


Fig. 129 a.

Liegt dagegen P außerhalb des Winkels (Fig. 129 b), so wird X_1 auf die Verlängerung von QO fallen, da für $a > b$ auch $\sqrt{a^2 - b^2} > a - b$.

Das Dreieck wird in diesem Fall im Scheitelwinkel des gegebenen Winkels erhalten; PX_1 wird nämlich auch die Verlängerung von SO treffen, da $\sqrt{a^2 - b^2} < a$ ist.

Beide Werte fallen in einen zusammen (Fig. 129 c), wenn $a = b$ ist, $x = 0$. Es wird dann das

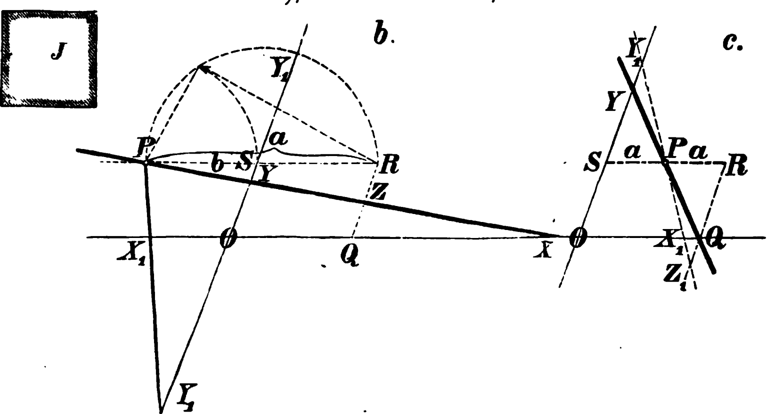
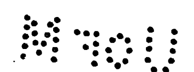


Fig. 129 b und c.



kleinste Dreieck $QO\dot{Y}$ abgeschnitten, das den Bedingungen der Aufgabe genügt; irgend ein anderes Dreieck OY_1X_1, dessen Seite Y_1X_1 durch P geht, übertrifft jenes um $\triangle QX_1Z_1$. Wäre nun $a < b$, $PR < SP$, so wäre ein kleineres Dreieck als QOY abzuschneiden, was unmöglich ist. Dies ergibt sich auch sofort daraus, daß dann $\sqrt{a^2 - b^2}$ imaginär wäre.

9. Aufgabe. *Ein rechtwinkeliges Dreieck zu zeichnen, von dem die Unterschiede d_1 und d_2 zwischen der Hypotenuse und je einer Kathete gegeben sind.* Die beiden Katheten seien x und y, die Hypotenuse z, so ist

$$z - x = d_1, \qquad z - y = d_2,$$

$$x = z - d_1, \qquad y = z - d_2$$

und da

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

so ist nun

$$(z - d_1)^2 + (z - d_2)^2 = z^2,$$

$$z = d_1 + d_2 \pm \sqrt{2 d_1 d_2},$$

also:

$$x = d_2 \pm \sqrt{2 d_1 d_2},$$

$$y = d_1 \pm \sqrt{2 d_1 d_2},$$

so daß nur

$$w = \sqrt{2 d_1 d_2}$$

zu zeichnen ist. Da in einem Dreieck eine Seite größer als der Unterschied der beiden andern ist (I. Teil § 18, 4 a), also

$$x > d_2, \qquad y > d_1,$$

so sind hier nur die oberen Zeichen zulässig.

Die Gleichung zweiten Grades für z stimmt aber überein mit:

$$(d_1 - z)^2 + (d_2 - z)^2 = z^2,$$

was den Katheten

$$x = d_1 - z, \qquad y = d_2 - z$$

oder

$$z + x = d_1, \qquad z + y = d_2$$

entspricht; das negative Zeichen in z entspricht daher der Aufgabe, wenn die Summen der Hypotenuse und je einer Kathete gegeben sind:

$$z = d_1 + d_2 - \sqrt{2 d_1 d_2}, \qquad x = \sqrt{2 d_1 d_2} - d_2, \qquad y = \sqrt{2 d_1 d_2} - d_1.$$

Hier kann nur das negative Zeichen gelten, weil der Annahme nach $z < d_1$ oder d_2 ist. Es muß aber hier

$$x - y < z$$

und somit

$$d_1 - d_2 < d_1 + d_2 - \sqrt{2 d_1 d_2}$$

sein oder

$$\sqrt{2 d_1 d_2} < 2 d_2, \qquad d_1 < 2 d_2.$$

Zusatz. Die obigen Werte für x, y, z werden rational, sobald

$$\sqrt{2 d_1 d_2}$$

es ist.

Setzen wir $d_1 = 1, \quad d_2 = 2p^2,$

so ist $y = 1 + 2p,$

d. h. irgend eine ungerade Zahl; somit

$$x = 2p^2 + 2p = \frac{(2p+1)^2 - 1}{2} = \frac{y^2 - 1}{2}, \quad z = x + 1 = \frac{y^2 + 1}{2}.$$

Dies gibt die alte Regel des Pythagoras zur Auffindung sogenannter pythagoreischer Zahlendreiecke, d. h. solcher rechtwinkeliger Dreiecke, deren Seitenlängen ganze Zahlen sind. — Setzen wir

$$d_1 = 2, \quad d_2 = p^2,$$

so ist: $y = 2 + 2p = 2(p + 1)$

d. i. irgend eine gerade Zahl,

$$x = p^2 + 2p = (p+1)^2 - 1 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 - 1, \quad z = x + 2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + 1.$$

Dies führt auf die Regel des Platon zur Lösung der genannten Aufgabe.

10. Aufgabe. *Ein rechtwinkeliges Dreieck ist zu zeichnen, von dem eine Kathete a und das Verhältnis derselben zum Unterschied der beiden andern Seiten gegeben ist $q : p$.*

Die andere Kathete sei b, die Hypotenuse c, also

$$\frac{c - b}{a} = \frac{p}{q}, \quad c - b = \frac{p}{q} a;$$

hier muß $p < q$ sein, damit $c - b < a$ ist. Da nun

$$c^2 - b^2 = (c - b)(c + b) = a^2,$$

so ergibt die Teilung

$$c + b = \frac{q}{p} a.$$

Teilt man a nach den betreffenden Verhältnissen, so erhält man aus $(c - b)$ und $(c + b)$ die Werte für c und b.

Die Berechnung ergibt übrigens auch

$$c = \frac{q^2 + p^2}{2qp} \cdot a, \quad b = \frac{q^2 - p^2}{2qp} \cdot a.$$

Man zeichnet hier zunächst den Faktor von a als Streckenverhältnis (nach § 28, 5).

Zusatz. Die letzteren Gleichungen können dazu dienen, die Aufgabe „pythagoreische Zahlendreiecke zu finden“ allgemein zu lösen. Setzen wir nämlich $a = 2pq$, so wird

$$b = q^2 - p^2, \quad c = q^2 + p^2,$$

wobei q und p als ganze Zahlen gewählt werden, z. B.:

$q = 2, \quad p = 1, \quad$ daher: $a = 4, \quad b = 3, \quad c = 5;$

$q = 3, \quad p = 2, \quad$ daher: $a = 12, \quad b = 5, \quad c = 13.$



Will man hierbei nur solche Zahlen für a, b, c erhalten, deren größtes gemeinsames Maß die Einheit ist, so dürfen p und q keinen gemeinsamen Teiler haben, und es muß eines von beiden als gerade, das andere als ungerade Zahl gewählt werden.

Fügt man zwei solche pythagoreische Dreiecke, die in einer Kathete übereinstimmen, mit eben dieser Kathete zusammen [wie z. B. die Dreifachen von 3, 4, 5, d. h. 12, 9, 15 und 12, 5, 13], so entsteht ein schiefwinkeliges Dreieck [mit den Seiten 15, 13, 14 oder 15, 13, 4], dessen Höhe eine rationale Zahl [12] ist; somit werden auch die Werte für den Inhalt und für den Halbmesser des ein-, an- und umbeschriebenen Kreises rational (§ 27, 3, 5, 6).

Achtes Kapitel.

Berechnung von Umfang und Inhalt des regelmäßigen Vielecks und des Kreises.

§ 30. Das dem Kreis ein- und umbeschriebene regelmäßige Vieleck.

A. Berechnung der Winkel.

1. Teilt man den Umfang eines Kreises in n gleiche Teile, so bestimmen die Teilpunkte ein gleichseitiges n-eck; ebenso sind die Winkel dieses n-ecks einander gleich, da sie Umfangswinkel zu gleichen Teilen $\left(\frac{n-2}{n}\right)$ des Umfangs sind (vgl. I. Teil, § 42, 4).

a) *Ein dem Kreise einbeschriebenes gleichseitiges Vieleck ist regelmäßig.*

Zeichnet man in irgend welche Kreise je ein regelmäßiges n-eck, so sind diese Figuren einander ähnlich, woraus folgt:

b) *Das Verhältnis der Seite des regelmäßigen einbeschriebenen n-ecks zum Halbmesser des Kreises ist für alle Kreise unveränderlich.*

2. Zu den n gleichen Seiten des regelmäßigen n-ecks gehören gleiche Mittelpunktswinkel; jeder einzelne solche Winkel ist gleich dem n^{ten} Teile des Vollwinkels. Also:

a) *Zu der Seite des regelmäßigen n-ecks gehört der Mittelpunktswinkel* $\frac{4R}{n} = \frac{360^0}{n}$.

b) *Zu irgend einem Bruchteil $\frac{m}{n}$ des Umfangs gehört $\frac{m}{n} \cdot 360^0$ als Mittelpunktswinkel, $\frac{m}{n} \cdot 180^0$ als Umfangswinkel.*

B. Die Seiten der einbeschriebenen Vielecke.

3. a) Zur Seite s_4 des regelmäßigen Vierecks gehört der Mittelpunktswinkel $360^0 : 4 = 90^0$; somit geben zwei zueinander senkrechte Durchmesser die Ecken des Vierecks. — Ist r der Halbmesser, so ist $s_4^2 = r^2 + r^2$, also $\boldsymbol{s_4 = r\sqrt{2}}$ $[= 1{,}414\, r]$.

b) Zur Seite s_6 des regelmäßigen Sechsecks gehört der Mittelpunktswinkel $360^0 : 6 = 60^0$; die Summe der beiden andern Winkel des entstehenden gleichschenkeligen Dreiecks ist $= 120^0$, jeder $= 60^0$, also ist das Dreieck gleichseitig, und es wird $\boldsymbol{s_6 = r}$. Die Ecken des Sechsecks finden sich also durch (fünfmaliges) anschließendes Eintragen des Halbmessers als Sehne.

c) Zur Seite s_{10} des regelmäßigen Zehnecks gehört der Mittelpunktswinkel $ACB = 360^0 : 10 = 36^0$; die Summe der Winkel bei A und B ist $= 144^0$, jeder $= 72^0 = 2 \cdot 36^0$. Halbiert man $\sphericalangle A$ durch AF, so hat $\triangle BAF$ die gleichen Winkel; es ist also gleichschenkelig wie auch $\triangle CAF$, $CF = AF = AB = s_{10}$ und $CAB \backsim ABF$, somit: $CA : AB = AB : BF$ oder $r : s_{10} = s_{10} : (r - s_{10})$, d. h. s_{10} ist der durch den goldenen Schnitt bestimmte größere Teil von r (S. 27, § 10, 2b). Man zeichnet also mit r und $\frac{r}{2}$ als kleineren Seiten ein rechtwinkeliges Dreieck (vgl. Fig. 30 und 132): der Unterschied der längsten Seite und $\frac{r}{2}$ ist dann $= s_{10}$. — Die Figur ergibt:

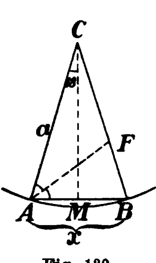


Fig. 130.

$$\left(s_{10} + \frac{r}{2}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{5r^2}{4}, \text{ also: } \boldsymbol{s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)} \quad [= 0{,}618\, r].$$

4. **Aufgabe.** Gegeben sei die Sehne s_{II} eines Bogens CB; man soll die Sehne s_I des doppelten Bogens CBD finden. — Hier ist $CE^2 = CB^2 - EB^2$ und $EB = \frac{CB^2}{AB}$,

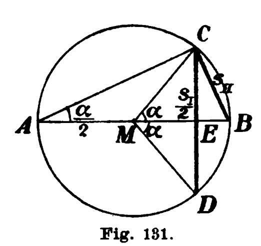


Fig. 131.

also: $$\left(\frac{s_I}{2}\right)^2 = s_{II}^2 \left[1 - \left(\frac{s_{II}}{2r}\right)^2\right]$$

oder $$s_I = s_{II}\sqrt{4 - \left(\frac{s_{II}}{r}\right)^2}.$$

Die Formel ergibt unter Benützung der Werte in 3, wenn $s_I = s_n$, $s_{II} = s_{2n}$ gesetzt wird:

a) die Seite s_3 des regelmäßigen Dreiecks:

$$s_3 = r\sqrt{4-1} \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{s_3 = r\sqrt{3}} \quad [= 1{,}732\, r].$$

b) die Seite s_5 des regelmäßigen Fünfecks:

$$s_5 = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) \cdot \sqrt{4 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}} = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$
$$= \frac{r}{4} \cdot \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \frac{r}{4} \cdot \sqrt{40 - 8\sqrt{5}}$$

oder $$s_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \quad [= 1{,}1756\, r].$$

Anmerkung. a) Es ist

$$s_5^2 = \frac{r^2}{4}(10 - 2\sqrt{5}) = \frac{4r^2}{4} + \frac{r^2}{4}(6 - 2\sqrt{5}) = r^2 + \left[\frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)\right]^2$$

oder $$s_5^2 = r^2 + s_{10}^2.$$

b) Dieses Ergebnis läßt sich auch an der Fig. 132 gewinnen, wo $CB = s_5$ und $CA = s_{10}$ sein möge. Dann ist

$$\sphericalangle CMB = \frac{4R}{5}, \quad \sphericalangle CMA = \frac{2R}{5},$$

also $$\sphericalangle MCB = \frac{3R}{5};$$

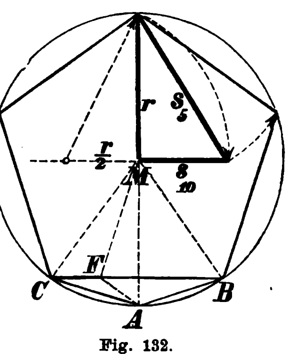


Fig. 132.

und wenn $\sphericalangle CMA$ durch MF halbiert wird, so ist auch $\sphericalangle FMB = \frac{3R}{5}$, somit sind FM und MC gewendet parallel im Zweistrahl B, folglich (S. 23, § 8, 1)

$$BF \cdot BC = \overline{BM}^2.$$

Weil aber auch $\sphericalangle ABC = ACB = CAF$ (denn F liegt auf der Mittelsenkrechten zu AC), so sind AB und FA gewendet parallel im Zweistrahl C, folglich ist auch:

$$FC \cdot BC = \overline{CA}^2.$$

Also wird $(BF + FC) \cdot BC$ oder $\overline{BC}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{CA}^2$,

d. h. wieder $$s_5^2 = r^2 + s_{10}^2.$$

5. Aufgabe. Gegeben sei die Sehne s_{I} eines Bogens; man soll die Sehne s_{II} des halben Bogens (oder aus der Seite des regelmäßigen n-ecks die Seite des regelmäßigen $2n$-ecks) finden.

Es ist (Fig. 131):

$$\overline{CB}^2 = AB \cdot EB \quad \text{oder} \quad s_{\mathrm{II}}^2 = 2r(r - x), \quad \text{wobei}$$

$$x = EM = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_{\mathrm{I}}}{2}\right)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{4 - \left(\frac{s_{\mathrm{I}}}{r}\right)^2}, \quad \text{also:}$$

$$s_{\mathrm{II}}^2 = 2r^2 - r^2 \cdot \sqrt{4 - \left(\frac{s_{\mathrm{I}}}{r}\right)^2} \quad \text{oder} \quad s_{\mathrm{II}} = r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\frac{s_{\mathrm{I}}}{r}\right)^2}}.$$

Die Formel ergibt unter Benützung der Werte in 3, indem man für $s_{\mathrm{I}} = s_n$, $s_{\mathrm{II}} = s_{2n}$ die Werte einsetzt:

a) die Seite s_8 des regelmäßigen Achtecks:

$$s_8 = r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{4 - 2}} \quad \text{oder} \quad s_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}} \quad [= 0{,}765\, r].$$

b) die Seite s_{12} des **regelmäßigen Zwölfecks:**

$$s_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - 1}} \quad \text{oder} \quad s_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}} \quad [= 0{,}518\, r].$$

Für letzteres läßt sich auch schreiben $s_{12} = \frac{r}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$. Die Übereinstimmung ergibt sich durch Quadrieren beider Formeln.

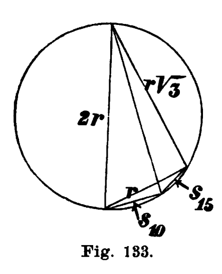


Fig. 133.

6. Um die Seite s_{15} des **regelmäßigen Fünfzehnecks** zu finden, beachtet man, daß $\frac{1}{15} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$. Werden also von einem Punkt eines Kreises aus s_6 und s_{10} als Sehnen eingetragen (Fig. 133), so ist der Unterschied der zugehörigen Bögen der 15te Teil des Umfanges, also die Sehne $= s_{15}$.

Zur Berechnung von s_{15} wendet man den Ptolemäischen Lehrsatz an (S. 98, § 27,7 a):

$$r \cdot \sqrt{(2r)^2 - s_{10}^2} = 2r \cdot s_{15} + s_{10} \cdot \sqrt{(2r)^2 - s_6^2};$$

werden hier die Werte von s_{10} und s_6 eingesetzt, so folgt:

$$s_{15} = \frac{r}{4} \cdot \left[\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right] \quad [= 0{,}416\, r].$$

7. Durch wiederholte Halbierung des Bogens (oder rechnend unter Anwendung der Formel in 5) erhält man die Seiten der Vielecke, deren Eckenzahl ist $= 1 \cdot 2^n$, $= 3 \cdot 2^n$, $= 5 \cdot 2^n$, $= 15 \cdot 2^n$.

Anmerkung. Seit Euklid (300 v. Chr.) waren dies die einzigen regelmäßigen Vielecke, die man durch Benützung von Gerade und Kreis zu zeichnen und auch zu berechnen wußte, bis im Jahre 1801 K. F. Gauß zeigte, daß mit diesen Hilfsmitteln jedes Vieleck von $(2^n + 1)$ Seiten gezeichnet werden kann, wenn diese Zahl eine Primzahl ist (z. B. $2^4 + 1 = 17$, $2^8 + 1 = 257$).

8. Aufgabe: *Zu einer gegebenen Strecke als Seite ist ein regelmäßiges Vieleck zu zeichnen.* Dies kann man, wenn es sich um eines der betrachteten Vielecke handelt, stets dadurch ausführen, daß man aus der Formel für die Seite den Halbmesser ausrechnet und den Ausdruck zeichnet (nach § 28), — oder indem man ein regelmäßiges Vieleck von der angegebenen Eckenzahl in einen Kreis zeichnet und hierzu das ähnliche mit der gegebenen Seite. Ganz einfach ist übrigens die Zeichnung des regelmäßigen Drei-, Vier-, Sechs-, Acht-, Zwölfecks; bei Acht- und Zwölfeck handelt es sich nur um die Zeichnung des Außenwinkels (von 45° und 30°). Im regelmäßigen Fünfeck $ABCDE$ (Fig. 134) ist $\measuredangle ADB = \frac{180}{5} = 36^0$; somit verhält sich (gemäß 3, c) $AD : AB = AB : (AD - AB)$, und man erhält AD

aus $AB = s_5$ (nach S. 27, § 10, 2a), indem man nach der Berechnung aus dieser Gleichung zeichnet:

$$AD = \frac{s_5}{2} + \sqrt{s_5^2 + \left(\frac{s_5}{2}\right)^2}.$$

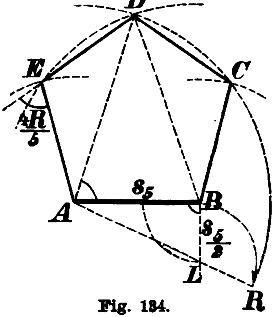


Fig. 134.

Das regelmäßige **Zehneck** über AB als Seite erhält man durch den Kreis, der aus D als Mittelpunkt um AB beschrieben wird.

C. Die Seiten der umbeschriebenen Vielecke.

9. Das einem Kreis **umbeschriebene regelmäßige** n-**eck** wird erhalten, indem man in den Ecken des einbeschriebenen n-ecks die Berührenden zeichnet, oder indem man sie parallel zu dessen Seiten zieht (Fig. 135). Es sei $DE = t_n$ eine Seite des umbeschriebenen n-ecks; sie sei parallel der Seite $BC = s_n$ des einbeschriebenen. Dann verhält sich:

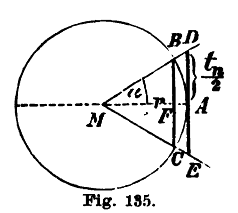


Fig. 135.

$$DE : BC = MA : MF \quad \text{oder} \quad t_n : s_n = r : \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2},$$

also
$$t_n = \frac{r \cdot s_n}{\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}} \quad \text{oder} \quad t_n = \frac{2 s_n}{\sqrt{4 - \left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}.$$

Beispiele.

a) $t_3 = \frac{2r\sqrt{3}}{\sqrt{4-3}}$ oder $t_3 = 2r\sqrt{3}$ $[= 3{,}464\, r]$.

b) $t_6 = \frac{2r}{\sqrt{4-1}} = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ oder $t_6 = \frac{2}{3} r\sqrt{3}$ $[= 1{,}155 r]$.

c) $t_{12} = \frac{2r\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{4-(2-\sqrt{3})}} = 2r \cdot \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$ oder $t_{12} = 2r(2-\sqrt{3})$ $[=0{,}536 r]$.

10. **Aufgabe.** Gegeben sei ein umbeschriebenes regelmäßiges n-eck; man soll das umbeschriebene regelmäßige $2n$-eck finden. — Man zieht vom Mittelpunkt aus nach den Ecken des ersteren die Strahlen und zeichnet in deren Schnittpunkten mit dem Kreis dessen Berührende [z. B. (Fig. 136) für ML in C die $UV \perp ML$] je bis zum Durchschnitt mit den Seiten des n-ecks.

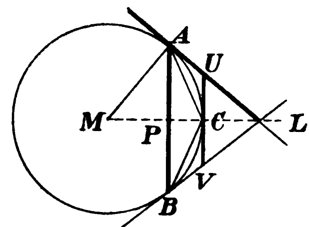


Fig. 136.

Zur Berechnung von t_{2n} benützt man $\triangle\, ULV \backsim ALB$, also

$$UV : AB = UL : AL$$

oder
$$t_{2n} : s_n = \frac{t_n - t_{2n}}{2} : \frac{t_n}{2},$$

woraus $t_{2n} \cdot t_n = s_n \cdot (t_n - t_{2n})$ oder $t_{2n} = \frac{s_n \cdot t_n}{s_n + t_n}$.

Z. B. aus $s_4 = r\sqrt{2}$, $t_4 = 2r$ folgt:

$$t_8 = \frac{2r^2\sqrt{2}}{r(2+\sqrt{2})} = \frac{2}{1+\sqrt{2}} \cdot r = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) \cdot r \; [= 0{,}828\, r].$$

§ 31. Umfang des regelmäßigen Vielecks und des Kreises.

1. Aus den in § 30 angegebenen Werten für s_n und t_n lassen sich der Umfang e_n des ein- und der Umfang u_n des umbeschriebenen n-ecks berechnen. Es ist nämlich:

$$e_n = n \cdot s_n \quad \text{und} \quad u_n = n \cdot t_n.$$

Beispiele (wobei der Halbmesser r durch die Hälfte des Durchmessers d ersetzt wird):

$e_3 = 3 \cdot r\sqrt{3}$	$= 2{,}598\, d$	$u_3 = 3 \cdot 2r\sqrt{3}$	$= 5{,}196\, d$
$e_4 = 4 \cdot r\sqrt{2}$	$= 2{,}828\, d$	$u_4 = 4 \cdot 2r$	$= 4{,}000\, d$
$e_6 = 6 \cdot r$	$= 3{,}000\, d$	$u_6 = 6 \cdot \frac{2}{3}r\sqrt{3}$	$= 3{,}464\, d$
$e_{12} = 12 \cdot r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$	$= 3{,}106\, d$	$u_{12} = 12 \cdot 2r(2 - \sqrt{3})$	$= 3{,}215\, d$
e_{24}	$= 3{,}133\, d$	u_{24}	$= 3{,}160\, d$
e_{48}	$= 3{,}139\, d$	u_{48}	$= 3{,}146\, d$
e_{96}	$= 3{,}141\, d$	u_{96}	$= 3{,}143\, d$

u. s. w.

2. Es sei (Fig. 136) AB die Seite des einbeschriebenen n-ecks, AC die des $2n$-ecks. Dann ist

$$AC + CB > AB$$

oder
$$2 \cdot s_{2n} > s_n,$$

also auch $n \cdot 2s_{2n} > n \cdot s_n$, d. h. $e_{2n} > e_n$.

Es sei ferner AL die halbe Seite des umbeschriebenen n-ecks, AU die des $2n$-ecks. Dann ist $UC < UL$, also:

$$AU + UC < AL \quad \text{oder} \quad t_{2n} < \frac{t_n}{2},$$

also auch $n \cdot 2t_{2n} < n \cdot t_n$, d. h. $u_{2n} < u_n$.

Der Umfang des einbeschriebenen regelmäßigen 2n-ecks ist größer als der des n-ecks; der Umfang des umbeschriebenen regelmäßigen 2n-ecks ist kleiner als der des n-ecks.

3. Der Umfang des einbeschriebenen Vielecks ist um so größer,

je mehr Punkte er mit dem Kreise gemeinsam hat. Läßt man die Zahl dieser Punkte unbeschränkt wachsen, so ergibt sich, daß der Umfang des Kreises selbst größer ist als der jedes einbeschriebenen regelmäßigen Vielecks. Dagegen nimmt der Umfang der umbeschriebenen regelmäßigen Vielecke mit der Zunahme der Eckenzahl ab; hieraus folgt, daß der Kreisumfang kleiner ist als der jedes umbeschriebenen regelmäßigen Vielecks. Der Umfang u des Kreises liegt daher zwischen e_n und u_n, und er ist ein Vielfaches des Kreisdurchmessers d, das man durch π (περιφέρεια = Umfang) zu bezeichnen pflegt. Also:

π ist die Zahl, mit der man den Durchmesser zu vervielfachen hat, um den Kreisumfang zu erhalten.

Da einerseits $e_6 = 6r = 3d$ und anderseits $u_4 = 8r = 4d$, so ist

$$3 < \pi < 4 .$$

Wie man aus den Beispielen in 1 erkennt, erhält man π zwischen immer engeren Grenzen eingeschlossen, wenn man die Umfänge von Vielecken mit stets größer werdender Seitenzahl berechnet. So fand schon Archimedes (gest. 212 v. Chr.) durch Vordringen bis zum 96-eck:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70} .$$

Annähernd ist also:

$$\boldsymbol{\pi = \frac{22}{7} = 3{,}14} .$$

Dann ist der

Kreisumfang $\boldsymbol{u = \pi d}$ oder $\boldsymbol{u = 2\pi r}$.

Zusatz. Vergleicht man den aus dem 96-eck gewonnenen Wert $\pi = 3{,}142$ mit den Vorzahlen von d bei den zuvor berechneten Vielecken, z. B. den Zwölfecken:

$$a = 3{,}106 , \quad b = 3{,}215$$

so ist: $\pi - a = 0{,}036 , \quad b - \pi = 0{,}073$

also annähernd: $2(\pi - a) = b - \pi , \quad \pi = \frac{2a + b}{3} .$

Setzt man hier für a und b schon die (genauer berechneten) Werte für das 24-Eck:

$$a = 3{,}13263 \quad b = 3{,}15966 ,$$

so erhält man: $\pi = 3{,}14164$. Genauer ist:

$$\boldsymbol{\pi = 3{,}1416} ,$$

was um weniger als 0,00001 abweicht von dem in anderer Weise auf 8 Stellen berechneten Wert:

$$\pi = 3{,}14159265 .$$

Geschichtliche Anmerkung. Ptolemäus (150 n. Chr.) berechnete mit Benutzung seines Lehrsatzes (S. 98, § 27, 7) die Sehnen und die Zahl π in der Weise, daß die Bruchteile wie bei der Winkelmessung in 60stel und $60 \cdot 60$stel der Einheit ausgedrückt wurden; er fand $\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{8}{60 \cdot 60}$ ($= 3{,}14166$). — Von den Indern wurde obige genauere Zahl benutzt $\pi = \frac{3927}{1250} = 3{,}1416$. — Erst gegen Ende des 16. Jahrhunderts wurde π mit einer Genauigkeit berechnet, welche jedes Bedürfnis weit übertrifft: von Vieta (1579) auf 10 Bruchstellen, von Ludolf van Ceulen (gespr. Köln, 1540—1610) auf 20, dann 32, zuletzt auf 35 Stellen. Der letztere Wert stand in seiner Grabschrift und hieß die Ludolfsche Zahl. — Adriaan Anthoniszoon (Vater des bekannteren Adriaan Metius) fand (vor 1589) $\pi < 3\frac{17}{120}$ und $\pi > 3\frac{15}{106}$, und indem er je aus Zählern und Nennern das arithmetische Mittel nahm, setzte er

$$\pi = 3\frac{16}{113} \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{\pi = \frac{355}{113}} = 3{,}1415929 \ldots .$$

Mit Hilfe von Reihen ist die Berechnung von π noch weiter geführt worden. Als Irrationalzahl läßt sich π nie genau in Bruchteilen der Einheit ausdrücken.

Lindemann bewies (1882), daß π nicht Wurzel einer Gleichung mit rationalen Koeffizienten sein kann; hiernach ist auch die im folgenden annähernd ausgeführte Geradstreckung des Kreisumfangs und (§ 32, 3) die Darstellung des Kreisinhaltes als Quadrat durch Lineal und Zirkel nicht vollständig genau ausführbar.

4. Die Aufgabe: *Eine Strecke zu zeichnen, die gleich dem Umfang des Kreises ist* (die Rektifikation des Kreises), läßt sich nur annäherungsweise mit Lineal und Zirkel lösen. Am einfachsten trägt man den Durchmesser $3\frac{1}{7}$mal ab. Annähernd gibt auch $s_3 + s_4 = r(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 3{,}146\,r$ den halben Umfang des Kreises. — Oder man zeichnet (nach Kochansky 1685) $\sphericalangle BMC = 30^0$ und in B die Berührende $CL = 3r$; dann ist AL ungefähr gleich dem Halbkreis, weil $CB = \frac{r}{2}\sqrt{3}$,

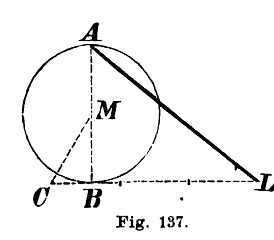


Fig. 137.

$$BL = r\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \text{und} \quad AL = r\sqrt{13\tfrac{1}{3} - 2\sqrt{3}} = 3{,}14150r.$$

§ 32. Inhalt des regelmäßigen Vielecks und des Kreises.

1. Der Flächeninhalt E_n des einbeschriebenen und der Flächeninhalt U_n des umbeschriebenen n-ecks wird durch die nach den Ecken gehenden Halbmesser in n gleiche Dreiecke zerlegt. Wenn nun wieder

s_n die Seite des einbeschriebenen n-ecks ist und x_n ihr Abstand vom Mittelpunkt, und wenn t_n die Seite des umbeschriebenen n-ecks bezeichnet, so ist

$$x_n = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2},$$

$$x_3 = \frac{r}{2}, \quad x_4 = \frac{r}{2}\sqrt{2}, \quad x_6 = \frac{r}{2}\sqrt{3}, \quad x_{10} = \frac{r}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

$$x_{12} = \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}, \ldots$$

Deshalb ist

$$E_n = n \cdot \frac{s_n x_n}{2} = \frac{e_n}{2} \cdot x_n \quad \text{und} \quad U_n = n \cdot \frac{{}_n r}{2} = \frac{u_n}{2} \cdot r, \text{ d. h.:}$$

Der Inhalt eines regelmäßigen Vielecks ist gleich dem Produkt aus seinem halben Umfang und dem Abstand seiner Seite vom Mittelpunkt.

Beispiele:

$E_3 = \frac{3r^2}{4}\sqrt{3}$	$= 1{,}299 r^2$	$U_3 = 3r^2\sqrt{3}$	$= 5{,}196 r^2$
$E_4 = 2r^2$	$= 2{,}000 r^2$	$U_4 = 4r^2$	$= 4{,}000 r^2$
$E_6 = \frac{3r^2}{2}\sqrt{3}$	$= 2{,}598 r^2$	$U_6 = 2r^2\sqrt{3}$	$= 3{,}464 r^2$
$E_{12} = 3r^2$	$= 3{,}000 r^2$	$U_{12} = 12r^2(2 - \sqrt{3})$	$= 3{,}215 r^2$

u. s. w.

2. a) Der Inhalt J eines Kreises ist größer als der des einbeschriebenen, kleiner als der des umbeschriebenen Vielecks. Mit dessen wachsender Seitenzahl nähern sich e_n und u_n dem Umfang $u = 2\pi r$ des Kreises, und der Seitenabstand von der Mitte nähert sich dem Halbmesser r. Deshalb wird schließlich:

$$J = \frac{u}{2} \cdot r = \frac{2\pi r}{2} \cdot r, \qquad \text{also:}$$

$$\textbf{Kreisinhalt} = \pi r^2 \quad \text{oder} \quad = \pi \frac{d^2}{4}.$$

b) Aus der Formel für den Kreisinhalt folgt:

Die Flächen zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser (oder wie die Quadrate ihrer Durchmesser).

3. Die Aufgabe: *Die Fläche eines Kreises in ein inhaltsgleiches Quadrat zu verwandeln* (die Quadratur des Kreises) hat viele Jahrhunderte die Menschen beschäftigt, ohne zu einer Lösung zu führen, so daß sie sprichwörtlich geworden ist. (Vgl. § 31, 3 Anmerkung).

Da $J = \frac{u}{2} \cdot r$, so ist *der Inhalt des Kreises gleich dem eines Dreiecks, dessen Grundseite gleich dem Umfang und dessen Höhe gleich dem*

Halbmesser ist. Hiermit ist die Aufgabe auf die in § 31, 4 zurückgeführt.

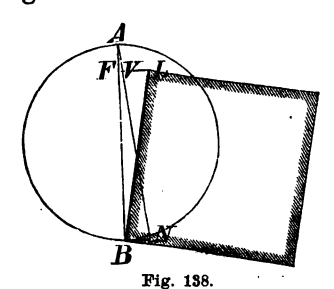


Fig. 138.

Die Quadratseite $x = \sqrt{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{d}{2}\sqrt{\pi}$ ist nach dem ägyptischen Wert für $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$ ungefähr $= \frac{8}{9} d$. — Genauer ist folgende Zeichnung. Wird $AF = \frac{1}{8} AB$, BN und $FL \perp AB$ gezogen, $BN = AF$ und, nachdem AVN gezogen, $VL = AF$ gemacht, so ist BL die Quadratseite. Es ist nämlich

$$AF = \tfrac{1}{4} r = BN = VL,$$

$$BF = \tfrac{7}{4} r, \quad FV = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{1}{4} r = \tfrac{1}{32} r, \quad FL = \tfrac{9}{32} r,$$

$$BL^2 = (\tfrac{7}{4} r)^2 + (\tfrac{9}{32} r)^2 = \tfrac{3217}{1024} r^2 = 3{,}14160\, r^2 \text{ (Baader 1880).}$$

§ 33. Teile des Kreisumfanges und des Kreisinhaltes.

1. Da zu gleichen Mittelpunktswinkeln in einem Kreis gleiche Bögen gehören, so folgt:

Ein Bogen (b) verhält sich zum Halbkreis (πr) wie sein Mittelpunktswinkel (β) zu $2R$ (180^0), d. h.:

$$\boldsymbol{b : \pi r = \beta^0 : 180^0.}$$

Hieraus: $b = \left(\frac{\beta^0}{180^0} \pi\right) \cdot r$ und $\beta = \frac{b}{\pi r} \cdot 180^0$.

Der Bogen zur Seite des regelmäßigen n-ecks ist $b_n = \frac{2\pi r}{n}$.

2. Aus 1 folgt, daß das Verhältnis der Länge eines Bogens zum Halbmesser nur vom Mittelpunktswinkel abhängig ist; dieses Verhältnis heißt der Arcus des zugehörigen Mittelpunktswinkels:

$$\frac{b}{r} = \pi \cdot \frac{\beta^0}{180^0} = \operatorname{arc}\beta \,.$$

Ist der Halbmesser $= 1$, so ist $b = \operatorname{arc}\beta$, so daß man auch den Arcus eines Winkels als die „Länge des Bogens beim Halbmesser 1" oder als „Bogenlänge im Einheitskreis" bezeichnet.

Beispiele:

$$\operatorname{arc} 180^0 = \pi, \quad \operatorname{arc} 90^0 = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arc} 1^0 = \frac{\pi}{180}, \quad \operatorname{arc} 1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60}.$$

Hiernach ist die Arcustafel berechnet, die zu jedem Winkel den Arcus gibt.

3. Anwendung der Arcustafel: a) Berechnung des Bogens zu einem Winkel.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \operatorname{arc} 38^0 &= 0{,}6632 \\ \operatorname{arc} 16' &= 0{,}0047 \\ \operatorname{arc} 20'' &= 0{,}0001 \\ \hline \operatorname{arc} 38^0\, 16'\, 20'' &= 0{,}6680. \end{aligned}$$

Liegt dieser Winkel am Mittelpunkt eines Kreises, dessen Halbmesser $r = 25$ cm ist, so ist der Bogen b zu $38^0\ 16'\ 20'' = 0{,}6680 \cdot 25$ oder $b = 16{,}7$ cm.

b) Berechnung des Winkels zu einem Bogen.

Beispiel: Für $r = 25$ cm und $b = 167$ mm ist $\frac{b}{r} = 0{,}668$.

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}6680 \\ \underline{0{,}6632 = \text{arc } 38^0} \\ 0{,}0048 \\ \underline{0{,}0047 = \quad \text{arc } 16'} \\ 0{,}0001 = \quad\quad \text{arc } 20'' \end{array}\right\} \text{ also } \quad \sphericalangle\, \beta = 38^0\ 16'\ 20''.$$

4. Unter Kreisausschnitt (Kreissektor) S versteht man einen Teil der Kreisfläche, der von einem Bogen und den nach seinen Grenzpunkten gehenden Halbmessern begrenzt wird.

Aus der Übereinstimmung der Ausschnitte eines Kreises, die zu gleichen Mittelpunktswinkeln oder Bögen gehören, folgt:

a) *Ein Kreisausschnitt verhält sich zur Kreisfläche wie sein Mittelpunktswinkel zu* $4R$ *— oder wie sein Bogen zum Umfang — (oder wie der Arcus seines Winkels zu* 2π*).*

$$\boldsymbol{S : \pi r^2 = \beta : 360} \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{S : \pi r^2 = b : 2\pi r = \text{arc } \beta : 2\pi},$$

also:
$$S = \frac{\beta}{360} \cdot \pi r^2 = \frac{br}{2} = \frac{r^2}{2} \text{ arc } \beta.$$

b) *Die Fläche des Kreisausschnitts ist gleich dem halben Produkt aus Bogen und Halbmesser.*

Sie ist also gleich der Fläche eines Dreiecks, dessen Grundseite gleich dem Bogen und dessen Höhe gleich dem Halbmesser ist.

Der Kreisausschnitt zum n^{ten} Teil des Umfangs ist:

$$S_n = \frac{\pi r^2}{n}.$$

c) *In zwei Kreisen verhalten sich die Ausschnitte gleicher Mittelpunktswinkel wie die Quadrate der Halbmesser (oder Durchmesser).*

5. Unter Kreisabschnitt (Kreissegment) versteht man einen Teil der Kreisfläche, der von einem Bogen und seiner Sehne begrenzt wird. Seine Fläche Σ (Fig. 139) ist gleich dem Unterschied des zugehörigen Ausschnittes S und des Dreiecks zwischen dessen Halbmessern und der Sehne.

Der Kreisabschnitt zum n^{ten} Teil des Umfangs ist:

$$\Sigma_n = \frac{\pi r^2}{n} - \frac{s_n x_n}{2},$$

wobei s_n und x_n wie in § 33, 1 einzusetzen sind.

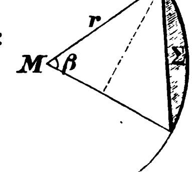


Fig. 139.

Beispiel:

$$\Sigma_3 = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{1}{2} \cdot r\sqrt{3} \cdot \frac{r}{2} = r^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{4}\sqrt{3}\right).$$

6. Um *einen Kreisbogen* AB (Fig. 140) *annähernd als Strecke darzustellen*, teilt man ihn in kleine Teile, deren Sehnen sich nur wenig von den Bogenteilen unterscheiden und trägt diese Sehnen auf einer Geraden, etwa der Berührenden AC an. — Das $\triangle ACM$ stellt dann den *Flächeninhalt des Ausschnitts* dar, und wenn $BF \parallel MA$, so gibt das $\triangle ACF$ die *Fläche des Abschnitts*. — Zu einem Mittelpunktswinkel von β^0 kann man auch den gerade gestreckten Halbkreis (S. 118, § 31, 4) im Verhältnis $\beta : 18^0$ teilen.

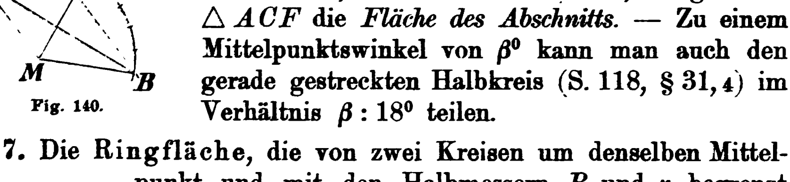


Fig. 140.

7. Die **Ringfläche**, die von zwei Kreisen um denselben Mittelpunkt und mit den Halbmessern R und r begrenzt wird, ist

$= \pi R^2 - \pi r^2$ oder: Ringfläche $= \pi(R^2 - r^2)$.

Fig. 141.

Anmerkung: 1) Wird bei zwei Kreisen mit demselben Mittelpunkt die den kleineren Kreis berührende Halbsehne des größeren durch s bezeichnet, so ist die Ringfläche auch $= \pi s^2$.

2) Ist aber die Breite dieses Ringes $= d$ nebst R (oder r) gegeben, so findet sich:

Ringfläche $= \pi d(2R - d)$ oder $= \pi d(2r + d)$.

8. Werden bei einem rechtwinkeligen Dreieck über dessen Seiten nach außen Halbkreise gezeichnet, so verhalten sich die Halbkreise über AB und AC (4c) wie $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2$ (S. 93, § 26, 5, Zus.); weil aber

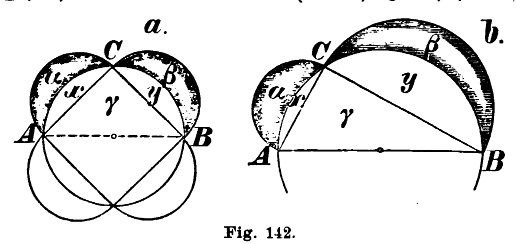


Fig. 142.

$\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{AB}^2$, so ist die Summe der Halbkreisflächen über AC und CB gleich der Fläche des Halbkreises über AB. Nimmt man also von beiden die Fläche der Kreisabschnitte x und y weg, so folgt für die mondförmigen Figuren α und β (Möndchen des Hippokrates 450 v. Chr.)

$$\alpha + \beta = \gamma.$$

IV. Abschnitt.

Beziehungen der Strecken und Inhalte geradliniger Figuren zu ihren Winkeln (Trigonometrie)*.

Neuntes Kapitel.

Die Funktionen spitzer Winkel im rechtwinkeligen Dreieck und im Kreis.

§ 34. Sinus und Cosinus eines spitzen Winkels.

1. Errichtet man (Fig. 143) zu dem einen Schenkel eines spitzen Winkels α eine beliebige Senkrechte BC, so läßt sich (zunächst durch Abtragen und Vergleichen annähernd, durch Messen und Teilen genauer) bestimmen, mit welcher Bruchzahl AB zu vervielfachen ist, um BC zu erhalten. Zieht man zu AC weitere Senkrechte B_1C_1, B_2C_2, . . ., so haben die Verhältnisse $\frac{BC}{AB}$, $\frac{B_1C_1}{AB_1}$, . . . sämtlich den gleichen Zahlwert (S. 13, § 3, 2). Man kann also irgend eines der entstandenen rechtwinkeligen Dreiecke auswählen: sowie $\sphericalangle\, \alpha$ bestimmt ist, so ist auch jener Zahlwert bestimmt. Dagegen ist für jeden anderen Winkel auch das Verhältnis der entsprechenden Strecken ein anderes, so daß jedem spitzen Winkel nur eine

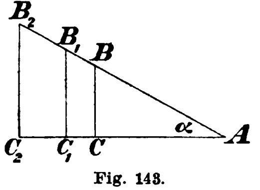


Fig. 143.

* Die Trigonometrie ist wesentlich zu astronomischen Zwecken gebildet worden, so daß die Lehre von der Berechnung der Kugeldreiecke (die sog. sphärische Trigonometrie) notwendiger war und demzufolge auch früher ausgebildet wurde als die Lehre von der Berechnung der ebenen Dreiecke (ebene Trigonometrie). Als Urheber jener ist der Grieche Hipparch (150 v. Chr.) anzusehen, zugleich der Schöpfer einer wissenschaftlichen Sternkunde. Er sowohl als der früher (S. 40, § 14, 1b) erwähnte Menelaos (80 n. Chr.) haben sich mit der Berechnung von Kreissehnen beschäftigt, und was diese Männer begonnen, führte Ptolemäus (150 n. Chr., S. 98) zu Ende, dessen großes astronomisches Werk, Almagest genannt, zugleich die Grundlage der Trigonometrie enthält und über ein Jahrtausend maßgebend blieb. Ptolemäus teilte den Kreishalbmesser ein in 60 gleiche Teile mit sechzigteiligen Unterabteilungen (wie bei der Winkelteilung) und drückte in solchen Teilen die Größe der verschiedenen Kreissehnen aus, dabei als Hauptsatz den benützend, welcher seinen Namen trägt (§ 27, 7) § 36, 3). Von den Spuren, welche Inder und Araber in der Trigonometrie hinterlassen, ist weiterhin (S. 124) die Rede; aber stets blieb die sphärische Trigonometrie die Hauptsache, und die ebene Trigonometrie wurde erst durch Regiomontanus (1463) zu der wichtigen Abteilung der Mathematik ausgebildet, die sie heute ist. Der rechnerische Teil erfuhr eine wesentliche Erleichterung durch Einführung der Logarithmen (1614). Die heutige schöne Gestaltung und Einfachheit der Trigonometrie verdankt man Euler (1707—1783).

solche Verhältniszahl entspricht und umgekehrt: jeder solcher Zahl entspricht nur ein spitzer Winkel. Sie erhielt und hat den Namen* „Sinus des Winkels α“. Heißt nun im rechtwinkeligen Dreieck die dem Winkel α gegenüberliegende Kathete seine Gegenkathete, so gilt als Erklärung:

Der Sinus eines spitzen Winkels im rechtwinkeligen Dreieck ist das Verhältnis seiner Gegenkathete zur Hypotenuse, —

also
$$\mathbf{\sin \alpha = \frac{a}{c}} \qquad \left[= \frac{\textbf{Gegenkathete}}{\textbf{Hypotenuse}}\right].$$

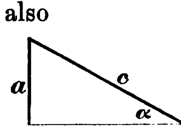


Fig. 144.

Der Sinus eines Winkels ist also eine reine Zahl, die nicht größer als 1 ist.

2. a) In einem rechtwinkeligen Dreieck ist durch den einen spitzen Winkel α auch der andere $\beta = (90^0 - \alpha)$ bestimmt; letzteren hieß man auch den Komplementwinkel von α.

Fig. 145.

Nun ist (Fig. 145):
$$\frac{b}{c} = \sin \beta = \textbf{co}(\text{mplementi})\textbf{sinus } \alpha.$$

Nennt man die dem Winkel α anliegende Seite seine Ankathete, so gilt folgende Erklärung:

Der Cosinus eines spitzen Winkels im rechtwinkeligen Dreieck ist das Verhältnis seiner Ankathete zur Hypotenuse —

also
$$\mathbf{\cos \alpha = \frac{b}{c}} \qquad \left[= \frac{\textbf{Ankathete}}{\textbf{Hypotenuse}}\right].$$

Der Cosinus eines Winkels ist also eine reine Zahl wie der Sinus.

b) Hieraus folgt, daß
$$\mathbf{\cos \alpha = \sin (90^0 - \alpha)} \quad \text{und} \quad \mathbf{\sin \alpha = \cos (90^0 - \alpha).} \quad \textbf{I.}$$

Der Cosinus eines Winkels ist gleich dem Sinus seines Ergänzungswinkels zu einem Rechten (seines Komplementwinkels).

---

* Die Entstehung des Namens Sinus ist höchst eigentümlicher Art, zugleich eine Andeutung des Entwicklungsganges der Mathematik und des Kulturzusammenhanges verschiedener Völker und Zeiten. Griechische Mathematiker hatten (vgl. vorige Seite, Anmerkg.) zu astronomischen Zwecken die Größe der zu beliebigen Zentriwinkeln gehörigen Sehnen berechnet; die unter Anregung griechischer Wissenschaft vielfach selbsttätigen Inder (etwa 500 n. Chr.) hatten die ganze Sehne durch die betreffende Halbsehne ersetzt, nützten aber den hierin liegenden Vorteil nicht aus. Erst die für die Entwickelung der Mathematik so bedeutsamen Araber taten dies; sie übernahmen auch den indischen Namen für Sehne, jiva, und schrieben denselben, wie sie ihn verstanden, dschiba. Die Konsonanten dieses Wortes lassen aber auch die Lesung dschaib zu, welches ein wirkliches arabisches Wort ist und „Einschnitt oder Busen“ bedeutet. Nach des Orientalisten Munk Hypothese ist nun das eigentliche Wort verloren gegangen und nur das letztere erhalten geblieben; jedenfalls gaben die ersten Übersetzer arabischer Werke jenes Wort durch das lateinische *sinus* wieder, und dieses blieb erhalten.

3. a) Aus 1 folgt:

$$\boldsymbol{a = c \cdot \sin \alpha} \qquad \text{und} \qquad c = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Die erstere dieser Formeln sagt:

Eine Kathete ist gleich dem Produkt aus Hypotenuse und Sinus ihres Gegenwinkels.

b) Aus 2a folgt:

$$\boldsymbol{b = c \cdot \cos \alpha} \qquad \text{und} \qquad c = \frac{b}{\cos \alpha}.$$

Die erstere dieser Formeln sagt:

Eine Kathete ist gleich dem Produkt aus Hypotenuse und Cosinus ihres Anwinkels.

4. Da nun $a = c \cdot \sin \alpha$, $b = c \cdot \cos \alpha$, und weil $a^2 + b^2 = c^2$, so ergibt sich durch Einsetzung dieser Werte:

$$\boldsymbol{\sin \alpha^2 + \cos^2 \alpha = 1.} \qquad \textbf{II.}$$

Hiernach kann man, wenn eine der Zahlen $\sin \alpha$ oder $\cos \alpha$ bekannt ist, die andere berechnen; denn:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \qquad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Ist z. B. $\sin \alpha = 0{,}6$, so ist $\cos \alpha = \sqrt{1 - 0{,}36} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$.

5. Die Anwendung dieser Bezeichnungen auf Strecken und Winkel im Kreis ergibt für die Halbsehne (Ordinate) CE und ihren Abstand (Abszisse) ME vom Mittelpunkt die folgenden Beziehungen zum Mittelpunktswinkel α:

$$CE = MC \cdot \sin \alpha, \qquad ME = MC \cdot \cos \alpha.$$

Fig. 146.

a. *Eine Halbsehne (Ordinate) ist gleich dem Produkt des Halbmessers mit dem Sinus des zugehörigen Mittelpunktswinkels.*

b. *Der Abstand einer Halbsehne vom Mittelpunkt (die Abszisse) ist gleich dem Produkt des Halbmessers mit dem Cosinus des zugehörigen Mittelpunktswinkels.*

Nehmen wir statt der Halbsehne die ganze Sehne CD und den zugehörigen Umfangswinkel $CFD = \alpha$, so ist

$$CD = CF \cdot \sin \alpha, \qquad FD = CF \cdot \cos \alpha.$$

a) *Jede Kreissehne ist gleich dem Produkt des Durchmessers mit dem Sinus ihres Umfangswinkels.*

b) *Jede Kreissehne ist gleich dem Produkt des Durchmessers mit dem Cosinus des Winkels, den sie mit dem Durchmesser eines ihrer Grenzpunkte bildet.*

Für die Seite s_n des regelmäßigen n-Ecks im Kreis und für deren

Abstand x_n vom Mittelpunkt folgt hieraus, da der Mittelpunktswinkel $\alpha = \frac{180^0}{n}$ ist:

$$s_n = 2r \sin \frac{180^0}{n}, \qquad x_n = r \cos \frac{180^0}{n}.$$

6. Um Sinus und Cosinus in Rechnungen anwenden zu können, bedarf man einer Tafel, aus der für jeden Winkel diese Werte bis zu dem erforderlichen Grad der Genauigkeit entnommen werden können. Nun lassen sich diese Werte bis zu jedem beliebigen Grad der Genauigkeit berechnen. — Zunächst ergeben sich die Werte für die einfachsten Bruchteile eines rechten Winkels $\frac{1}{2}R$, $\frac{1}{3}R$, $\frac{1}{5}R$.

a) In einem gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreieck ist

$$\alpha = 45^0, \qquad c = a\sqrt{2}, \qquad a = \frac{c}{2}\sqrt{2} = b,$$

also

$$\mathbf{\sin 45^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \cos 45^0} = 0{,}707.$$

b) Ein gleichseitiges Dreieck zerfällt durch eine Winkelhalbierende in rechtwinkelige Dreiecke, in denen

$$\alpha = 30^0, \qquad a = \frac{c}{2}, \qquad b = \frac{c}{2}\sqrt{3},$$

also

$$\mathbf{\sin 30^0 = \tfrac{1}{2} \quad = \cos 60^0} = 0{,}5$$

$$\mathbf{\cos 30^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \sin 60^0} = 0{,}866.$$

c) In einem gleichschenkeligen Dreieck, dessen Winkel an der Spitze $\frac{2}{5}R = 36^0$ ist, entspricht die Grundseite dem goldnen Schnitt des Schenkels (nach S. 112, § 30, 3c). Durch die Winkelhalbierende erhält man rechtwinkelige Dreiecke mit

$$\alpha = 18^0, \qquad a = \frac{c}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right) \quad \text{(S. 28, § 10, 2b).}$$

also

$$\mathbf{\sin 18^0 = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)} = \cos 72^0 = 0{,}309.$$

Dann ist

$$\cos 18^0 = \sqrt{1 - \sin^2 18} = \sqrt{1 - \tfrac{1}{16}(6 - 2\sqrt{5})},$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \sin 72^0 = 0{,}951.$$

Diese Werte ergeben sich auch, wenn man in $s_n = 2r \cdot \sin \frac{180^0}{n}$ die Werte für die Seiten des Vierecks, Sechsecks und Zehnecks einsetzt (gemäß S. 112f., § 30, 3). In gleicher Weise können dann auch die mit den Formeln § 30, 4 und 5 gefundenen Vielecksseiten zur Bestimmung von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ benutzt werden. Jedoch wendet man hierzu, unabhängig von jenen Berechnungen im Kreis, solche Formeln an, die unmittelbar den Zusammenhang von Sinus und Cosinus der Winkel α und $\frac{\alpha}{2}$ geben.

§ 35. Formeln für Sin und Cos des halben und doppelten Winkels.

1. In Fig. 147 läßt sich CE sowohl im $\triangle MCE$, als auch im $\triangle ACE$ berechnen. Im ersteren ist (§ 34, 5):

$CE = r \sin \alpha$, im letzteren ist:

$$CE = AC \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = \left(2r \cdot \cos \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin \frac{\alpha}{2},$$

folglich $\sin \alpha = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$

oder auch, wenn man 2α statt α setzt:

$$\mathbf{\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha.} \qquad \textbf{III.}$$

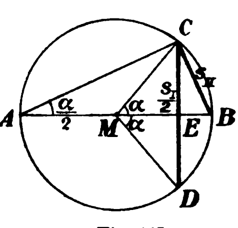


Fig. 147.

Hiernach findet man

$$\sin 36^0 = 2 \cdot \sin 18^0 \cdot \cos 18^0 = 2 \cdot \tfrac{1}{4} \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \cdot \tfrac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

$$= \tfrac{1}{8} \sqrt{40 - 8\sqrt{5}} \quad \text{oder} \quad \sin 36^0 = \tfrac{1}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = 0{,}588.$$

2. Ferner ist

$$AE = AM + ME = r\,(1 + \cos \alpha)$$

und $AE = AC \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \left(2r \cdot \cos \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$, also

$$\mathbf{1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2};} \qquad \textbf{IVa.}$$

ebenso $EB = MB - ME = r\,(1 - \cos \alpha)$

und da $\sphericalangle ECB = \frac{\alpha}{2}$ ist, $EB = CB \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = 2r \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, also:

$$\mathbf{1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.} \qquad \textbf{IVb.}$$

Aus beiden Gleichungen folgt noch durch Abziehen und Halbieren:

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

oder, indem man 2α statt α setzt:

$$\mathbf{\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.} \qquad \textbf{V.}$$

So ergibt sich nun z. B. für $\alpha = 36^0$:

$$1 - \cos 36^0 = 2 \sin^2 18^0 = \tfrac{1}{8}(6 - 2\sqrt{5}) = \tfrac{1}{4}(3 - \sqrt{5})$$

$$\text{oder} \qquad \cos 36^0 = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} + 1) = 0{,}809;$$

ferner für $\alpha = 45^0$:

$$2 \sin^2 22\tfrac{1}{2}^0 = 1 - \cos 45^0 = 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2},$$

also $\sin 22\tfrac{1}{2}^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$,

und $2 \cos^2 22\tfrac{1}{2}^0 = 1 + \cos 45^0 = 1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$,

also $$\cos 22\tfrac{1}{2}^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}};$$

Ebenso für $\alpha = 30^0$:

$$2 \sin^2 15^0 = 1 - \cos 30^0 = 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2},$$

also $$\sin 15^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}},$$

und $$2 \cos^2 15^0 = 1 + \cos 30^0 = 1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2},$$

also $$\cos 15^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

3. Sind sin und cos von Winkeln, die kleiner als 45^0, bekannt, so hat man damit auch (nach Formel I) cos und sin ihrer Ergänzungswinkel zu 90^0. Die Tafeln gehen deshalb nur von 0^0 bis 45^0 und haben zwei Eingänge mit Angaben von Winkeln links und rechts, die sich zu 90^0 ergänzen; die oberen Bezeichnungen Sinus und Cosinus gelten für die linke Reihe der Winkel, die unteren Cosinus und Sinus für die rechte Reihe.

	Sinus		Cosinus		
15^0	$\tfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$	0,259	0,966	$\tfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$	75^0
18^0	$\tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$	0,309	0,951	$\tfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	72^0
$22\tfrac{1}{2}$	$\tfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$	0,383	0,924	$\tfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$	$67\tfrac{1}{2}$
30^0	$\tfrac{1}{2}$	0,500	0,866	$\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$	60^0
36^0	$\tfrac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$	0,588	0,809	$\tfrac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$	54^0
45^0	$\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$	0,707	0,707	$\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$	45^0
	Cosinus		Sinus		

Hieraus, wie aus der Betrachtung der nebenstehenden Figur geht hervor:

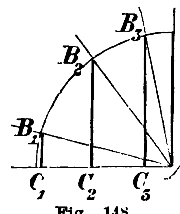


Fig. 148.

Der Sinus nimmt mit wachsendem Winkel zu, der Cosinus ab.

Man ersieht hieraus ferner, daß bei Änderung des Winkels α (z. B. beim Verdoppeln) der Sinus sich nicht auch in gleichem Verhältnis ändert, sondern daß er schwächer wächst als α (vergl. Formel II, $\sin 2\alpha < 2 \sin \alpha$).

Nähert sich α einem R, so nähert sich die Gegenkathete der Hypotenuse, und bei 90^0 fällt sie mit ihr zusammen;

nimmt α ab und nähert sich 0^0, so wird die Gegenkathete unbeschränkt kleiner und verschwindet bei 0^0. Auch in diesen zwei Grenzfällen spricht man vom Sinus; man setzt fest:

$$\sin 0^0 = 0 \qquad \text{und} \qquad \sin 90^0 = 1.$$

In umgekehrter Folge ergibt sich:

$$\cos 0^0 = 1 \qquad \text{und} \qquad \cos 90^0 = 0.$$

§ 36. Formeln für Sin und Cos von Summe und Unterschied zweier Winkel. Tafeln für Sin und Cos.

1. Um Sinus oder Cosinus für die Summe zweier Winkel α und β zu bestimmen, bildet man zunächst $\sphericalangle(\alpha + \beta)$, indem man an $\sphericalangle NOA = \alpha$ (Fig. 149) den Winkel $AOB = \beta$ anträgt. Wird auf dem zweiten Schenkel von β eine Strahlstrecke OB gewählt und $BX \perp ON$ gefällt, so ist

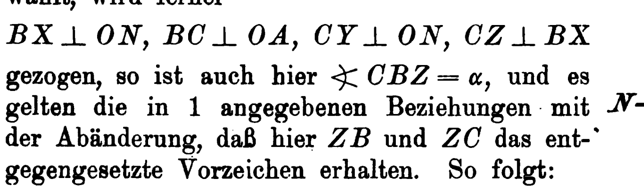
$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{XB}{OB}. \qquad \Big| \qquad \cos(\alpha + \beta) = \frac{OX}{OB}.$$

Fig. 149.

Zieht man nun $BC \perp OA$, $CY \perp ON$ und $CZ \perp BX$, so ist $\sphericalangle CBX = \alpha$, weil jeder von diesen den Winkel zwischen OC und BX zu einem Rechten ergänzt. Nun ist:

$XB = YC + ZB$	$OX = OY - ZC$
$= OC \cdot \sin\alpha + BC \cdot \cos\alpha;$	$= OC \cdot \cos\alpha - BC \cdot \sin\alpha;$
somit:	somit:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \dfrac{OC}{OB} + \cos\alpha \dfrac{BC}{OB}$	$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \dfrac{OC}{OB} - \sin\alpha \dfrac{BC}{OB}$
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$	$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

2. Bildet man den Unterschied der Winkel $(\alpha - \beta)$, indem man in $\sphericalangle NOA = \alpha$ den Winkel $AOB = \beta$ einträgt, und wird wiederum auf dem zweiten Schenkel von β die Strecke OB als Strahlstrecke gewählt, wird ferner



$BX \perp ON,\ BC \perp OA,\ CY \perp ON,\ CZ \perp BX$

gezogen, so ist auch hier $\sphericalangle CBZ = \alpha$, und es gelten die in 1 angegebenen Beziehungen mit der Abänderung, daß hier ZB und ZC das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten. So folgt:

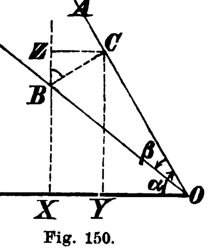


Fig. 150.

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \ \Big|\ \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Die vier abgeleiteten Formeln lassen sich in die folgenden zwei zusammenfassen:

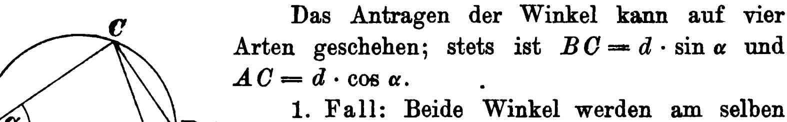
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \qquad \text{VI.}$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta. \qquad \text{VII.}$$

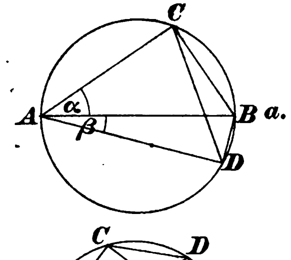
Welche Zeichen hierbei einander entsprechen, kann nicht zweifelhaft sein, da *sin* mit wachsendem Winkel zu-, *cos* aber abnimmt.

Aus diesen Formeln VI und VII lassen sich auch als besondere Fälle die Formeln III und V ableiten, indem man dort statt β den Wert α setzt; weiterhin gehen aus V die Formeln IV a und b hervor, wenn man dort (nach II)

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ oder $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ setzt.

3. Auch die Formeln VI und VII lassen sich am Kreis ableiten. Trägt man in einen Kreis an den Grenzpunkten eines Durchmessers d zwei Winkel α und β an, so entsteht ein Sehnenviereck $ABCD$ (Fig. 151), auf welches man den ptolemäischen Lehrsatz (S. 98, § 27, 7) anwenden kann.





Das Antragen der Winkel kann auf vier Arten geschehen; stets ist $BC = d \cdot \sin\alpha$ und $AC = d \cdot \cos\alpha$.

1. Fall: Beide Winkel werden am selben Grenzpunkt auf verschiedenen Seiten von d angetragen. Dann ist (a):

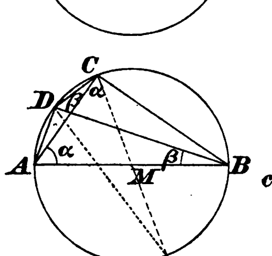
$CD = d\sin(\alpha+\beta)$, $BD = d\sin\beta$, $AD = d\cos\beta$; somit: $d \cdot d\sin(\alpha+\beta) =$

$$d\sin\alpha \cdot d\cos\beta + d\cos\alpha \cdot d\sin\beta \quad \text{oder:}$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

2. Fall: Beide Winkel werden am selben Grenzpunkt auf einerlei Seite von d angetragen. Dann ist (b):

$CD = d\sin(\alpha-\beta)$, $BD = d\sin\beta$, $AD = d\cos\beta$, somit: $d \cdot d\sin(\alpha-\beta) =$

$$d\sin\alpha \cdot d\cos\beta - d\cos\alpha \cdot d\sin\beta \quad \text{oder:}$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$



3. Fall: Die Winkel werden an beiden Grenzpunkten auf einerlei Seite von d angetragen. Dann ist (c):

$CD = d\cos(\alpha+\beta)$, $BD = d\cos\beta$, $AD = d\sin\beta$, somit: $d \cdot d\cos(\alpha+\beta) =$

$$d\cos\alpha \cdot d\cos\beta - d\sin\alpha \cdot d\sin\beta \quad \text{oder:}$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

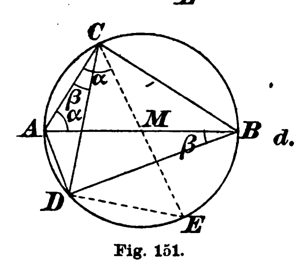


Fig. 151.

4. Fall: Die Winkel werden an beiden Grenzpunkten auf verschiedenen Seiten von d angetragen. Dann ist (d):

$$CD = d \cos(\alpha - \beta), \quad BD = d \cos\beta, \quad AD = d \sin\beta,$$

somit: $d \cdot d \cos(\alpha - \beta) = d \cos\alpha \cdot d \cos\beta + d \sin\alpha \cdot d \sin\beta$ oder:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

4. Die Formeln VI und VII eignen sich nun sehr dazu, für weitere Winkel Sinus und Cosinus zu berechnen. So ergibt sich:

$$\sin 15^0 = \sin(45^0 - 30^0) = \sin 45^0 \cdot \cos 30^0 - \cos 45^0 \cdot \sin 30^0$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2});$$

ebenso $\cos 15^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$.

Diese Werte gehen in die oben (S. 127, § 35, 2) berechneten über, wenn man sie quadriert und wieder die zweite Wurzel auszieht. — Ferner:

$$\sin 12^0 = \sin(30^0 - 18^0) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$$
$$= \tfrac{1}{8} \cdot \left[\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right] = 0{,}208,$$

woraus dann $s_{15} = 2r \,.\, \sin 12^0$ sich ergibt. — Endlich auch:

$$\sin 3^0 = \sin(18^0 - 15^0) = \sin 18^0 \cos 15^0 - \cos 18^0 \sin 15^0$$
$$= \tfrac{1}{16}\left[(\sqrt{5} - 1) \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2}) - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\,(\sqrt{6} - \sqrt{2})\right] = 0{,}052.$$

Zur Berechnung von Sinus und Cosinus von je 3^0 zu 3^0 bis zu 45^0 aus den schon berechneten Werten für 15^0, 18^0, 30^0, 36^0, 45^0 schlägt man am besten folgenden Weg ein, der zu den einfachsten Wurzelausdrücken führt, indem man immer die einfachen Werte für die Sinus und Cosinus von 30^0, 60^0 und 45^0 benutzt:

$12^0 = 30^0 - 18^0$	$42^0 = 60^0 - 18^0$	$33^0 = 45^0 - 12^0$	$3^0 = 45^0 - 42^0$
$6^0 = 36^0 - 30^0$	$24^0 = 60^0 - 36^0$	$39^0 = 45^0 - 6^0$	$21^0 = 45^0 - 24^0$.
$9^0 = 45^0 - 36^0$	$27^0 = 45^0 - 18^0$		

So erhält man:

∢	Sin	D.	D.	Cos	∢	∢	Sin	D.	D.	Cos	∢
0^0	0,000	52	1	1,000	90^0	24^0	0,407	49	20	0,914	66^0
3^0	0,052	53	4	0,999	87^0	27^0	0,454	47	23	0,891	63^0
6^0	0,105	51	7	0,995	84^0	30^0	0,500	46	25	0,866	60^0
9^0	0,156	52	10	0,988	81^0	33^0	0,545	45	27	0,839	57^0
12^0	0,208	51	12	0,978	78^0	36^0	0,588	43	30	0,809	54^0
15^0	0,259	50	15	0,966	75^0	39^0	0,629	41	32	0,777	51^0
18^0	0,309	49	17	0,951	72^0	42^0	0,669	40	34	0,743	48^0
21^0	0,358			0,934	69^0	45^0	0,707	38	36	0,707	45^0
	Cos	D.	D.	Sin			Cos	D.	D.	Sin	

5. Um nun die Werte für die Winkel von Grad zu Grad zu erhalten, beachte man, daß bei Berücksichtigung von bloß drei Stellen ihre Unterschiede D von 3^0 zu 3^0 für die aufeinander folgenden Werte sich nur wenig ändern; daher kann man dies auch für die zwischenliegenden Grade annehmen, nämlich $= \frac{1}{3}$ des Unterschieds von 3^0 zu 3^0. Hiernach ergibt sich

$$\sin 1^0 = \tfrac{1}{3} \cdot 0{,}052 = 0{,}017, \qquad \sin 2^0 = 0{,}052 - 0{,}017 = 0{,}035$$

u. s. f. Wollte man mehr Stellen berücksichtigen, so würden allerdings die Unterschiede für die aufeinander folgenden Glieder der von 3^0 zu 3^0 fortschreitenden Tafel sich stärker verändert zeigen; die Tafel müßte also etwa von $\frac{3}{2}^0$ zu $\frac{3}{2}^0$ oder von $\frac{3}{4}^0$ zu $\frac{3}{4}^0$ oder für noch kleinere Unterschiede mittels der abgeleiteten Formeln berechnet werden; dann erst, wenn für den gewünschten Grad der Genauigkeit die Unterschiede der aufeinander folgenden Glieder nahezu übereinstimmen, würden die Zwischenglieder eingeschaltet.

Nach einer anderen Art der Berechnung erhält man Sinus und Cosinus eines Winkels unmittelbar als einen Ausdruck des Arcus.

6. Eine Einschaltung ist auch dann auszuführen, wenn zu einem nicht in der Tafel genau enthaltenen Winkel ein Wert bestimmt werden soll. Ist z. B. $\sin 31^0 38'$ zu berechnen, während die Tafel gibt:

$$\sin 32^0 = 0{,}5299$$
$$\sin 31^0 = 0{,}5150$$

so ist der Wertunterschied für 1^0 . . . . $0{,}0149$,

also für $1'$ $\frac{149}{60} = 2{,}48$ Einheiten der letzten Stelle

[unter der nur annähernd geltenden Voraussetzung, daß die Unterschiede der Funktionen sich wie die Unterschiede der Winkel verhalten], somit für $38' = 38 \cdot 2{,}48 = 94$ Einheiten der letzten Stelle; deshalb wird $\sin 31^0 38' = 0{,}5150 + 0{,}0094 = 0{,}5244$.

Für die Einschaltung bei cos *ist der berechnete Unterschied abzuzählen,* da dessen Wert mit wachsendem Winkel abnimmt.

Anmerkung. Die Tafeln lassen sich benützen, um einen vorliegenden Winkel genauer zu messen, als es mit Hilfe eines gewöhnlichen Winkelmaßes geschehen kann, indem man zu dem Winkel ein rechtwinkeliges Dreieck zeichnet und die Seiten mit einem feinen Maßstab mißt, dann zu dem Verhältnis beider Strecken aus der Tafel den Winkel entnimmt; umgekehrt kann ein Winkel, dessen Größe durch Grade und Minuten bestimmt ist, mittels eines solchen Dreiecks, dessen Seitenverhältnisse in der Tafel aufgesucht werden, ziemlich genau gezeichnet werden.

§ 37. Tangens und Cotangens eines spitzen Winkels.

1. In Fig. 143 (S. 123) läßt sich auch angeben, wievielmal so groß BC ist als AC, und die Verhältnisse $\frac{BC}{AC}, \frac{B_1C_1}{AC_1}, \ldots$ haben alle den

gleichen Zahlwert (§ 3, 2); zu einem bestimmten $\sphericalangle \alpha$ ist auch dieser Zahlwert bestimmt und umgekehrt. Der so bestimmte Zahlwert heißt „Tangens des Winkels α". Man erklärt somit:

Die Tangens eines spitzen Winkels im rechtwinkeligen Dreieck ist das Verhältnis seiner Gegenkathete zur Ankathete — also:

Fig. 152.

$$\mathbf{tg}\ \alpha = \frac{a}{b} \qquad \left[= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}\right].$$

Tangens eines Winkels ist also eine reine Zahl.

2. a) Ganz wie in § 34, 2 (S. 124), ergibt sich auch hier:

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \beta = \textbf{co}(\text{mplementi})\textbf{tangens}\ \alpha$$

oder:

$$\mathbf{cotg}\ \alpha = \frac{b}{a} \qquad \left[= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}\right].$$

D. h.:

Die Cotangens eines spitzen Winkels im rechtwinkeligen Dreieck ist das Verhältnis seiner Ankathete zur Gegenkathete. Auch Cotangens eines Winkels ist also eine reine Zahl.

b) Aus a folgt:

$$\mathbf{cotg}\ \alpha = \mathbf{tg}\ (90^0 - \alpha) \quad \text{und} \quad \mathbf{tg}\ \alpha = \mathbf{cotg}\ (90^0 - \alpha) \qquad \textbf{VIII.}$$

Die Cotangens eines Winkels ist gleich der Tangens seines Ergänzungswinkels zu einem Rechten (seines Complementwinkels).

3. a) Aus 1 folgt:

$$a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad \text{und} \quad b = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

D. h.: *Die Gegenkathete eines Winkels ist gleich dem Produkt aus Ankathete und Tangens des Winkels.*

b) Aus 2a folgt:

$$b = a \cdot \operatorname{cotg} \alpha \quad \text{und} \quad a = \frac{b}{\operatorname{cotg} \alpha}.$$

D. h.: *Die Ankathete eines Winkels ist gleich dem Produkt aus Gegenkathete und Cotangens des Winkels.*

4. Aus den Erklärungen in 1 und 2a folgt, weil $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ ist:

$$\mathbf{tg}\ \alpha \cdot \mathbf{cotg}\ \alpha = 1. \qquad \textbf{IX.}$$

5. Ferner folgt aus

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c},$$

$$\mathbf{tg}\ \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \qquad \mathbf{cotg}\ \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \qquad \textbf{X.}$$

Ist z. B. $\sin \alpha$ bekannt, so folgt:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}, \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

6. Man erhält so eine Tafel für Tangens und Cotangens aus der Tafel für Sinus und Cosinus.

∢	Tangens		Cotangens		∢
15^0	$2-\sqrt{3}$	0,268	3,732	$2+\sqrt{3}$	75^0
$22\frac{1}{2}^0$	$\sqrt{2}-1$	0,414	2,414	$\sqrt{2}+1$	$67\frac{1}{2}^0$
30^0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0 577	1,732	$\sqrt{3}$	60^0
45^0	1	1,000	1,000	1	45^0
	Cotangens		Tangens		

Die Tangens nimmt mit wachsendem Winkel zu, die Cotangens ab. An den Grenzen der Größe eines spitzen Winkels ist

$$\operatorname{tg}\ 0^0 = \frac{\sin\ 0^0}{\cos\ 0^0} = \frac{0}{1} = 0 = \operatorname{cotg} 90^0,$$

$$\operatorname{tg} 90^0 = \frac{\sin 90^0}{\cos 90^0} = \frac{1}{0} = \infty = \operatorname{cotg} 0^0.$$

Jeder Zahlenwert zwischen 0 und ∞ entspricht also der Tangens oder auch der Cotangens eines Winkels.

7. Auch Tangens und Cotangens finden ihre Anwendung auf Strecken und Winkel im Kreis. In Fig. 135 (S. 115) ist die Strecke der Berührenden

$$AD = MA \cdot \operatorname{tg}\alpha = r \operatorname{tg}\alpha.$$

Daher kommt die Benennung „Tangens".

Läßt man hier ∢ α wachsen bis zu 90^0, so wächst AD und damit auch $\operatorname{tg}\alpha$ ins Unendliche.

Für die Seite t_n des umbeschriebenen regelmäßigen n-ecks gilt hiernach

$$t_n = 2r \operatorname{tg}\frac{180^0}{n}, \qquad r = \frac{t_n}{2}\operatorname{cotg}\frac{180^0}{n}.$$

8. Die Mathematik versteht unter „Funktion einer Größe x" jede Größe, deren Wert sich mit dem Werte von x zugleich ändert, z. B. x^3, $\sqrt[x]{64}$. Die vier Zahlgrößen $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$ ändern sich mit der Änderung von α; sie sind deshalb Funktionen von α und heißen auch kurz die Winkelfunktionen (goniometrischen Funktionen). — Es heißen auch $\sin\alpha$ und $\operatorname{tg}\alpha$ im engeren Sinne Funktionen, $\cos\alpha$ und $\operatorname{cotg}\alpha$ Cofunktionen.

Zusatz. Wie $\operatorname{cotg}\alpha$ als umgekehrter (reziproker) Wert von $\operatorname{tg}\alpha$, so wurde früher auch Secans $\left(\frac{MD}{MA}\text{ in Fig. 135}\right)$ als umgekehrter Wert von Cosinus, Cosecans als umgekehrter Wert von Sinus gebraucht:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

9. Durch die abgeleiteten Formeln läßt sich jede der vier Winkelfunktionen berechnen, wenn eine gegeben. Ist $\sin\alpha$ oder $\cos\alpha$ gegeben, so wird $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{cotg}\alpha$ nach 5 berechnet. Soll umgekehrt sin oder cos eines Winkels durch dessen tg oder cotg ausgedrückt werden, so beachte man, daß:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha,$$

woraus:
$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}}.$$

Die letzte Form entsteht aus der vorhergehenden, indem man Zähler und Nenner mit $\operatorname{tg}\alpha$ vervielfacht und IX berücksichtigt. Ebenso:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha + 1,$$

woraus:
$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}} = \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}.$$

10. Aus den Formeln III u. V (S. 127):

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

ergibt sich durch Teilung:
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha},$$

und indem man Zähler und Nenner durch $\cos^2\alpha$ teilt:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}, \qquad \text{ebenso} \qquad \operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{cotg}\alpha}.$$

11. Aus den Formeln IV a und b (S. 127):

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

folgt durch Teilen:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \text{also } \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Ebenso:
$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

12. Durch Zusammenzählen dieser beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{2}{\sin\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}, \qquad \text{somit}$$

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Durch Abzählen folgt ebenso:

$$\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

Ferner $\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$

Hiernach sind also alle Funktionen von α rational in $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ ausdrückbar.

13. Die VI und VII (S. 130) entsprechenden Formeln für tg und cotg ergeben sich aus diesen Formeln ebenfalls durch Teilung:

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

wobei die letzte Form aus der vorhergehenden mittels Teilung von Zähler und Nenner durch $\cos\alpha\cos\beta$ erhalten wird. Ebenso folgt:

$$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta \mp 1}{\operatorname{cotg}\beta \pm \operatorname{cotg}\alpha}.$$

§ 38. Formeln für Summen und Unterschiede von Winkelfunktionen.

1. Werden die Formeln für

$$\sin(\alpha+\beta) \quad \text{und} \quad \sin(\alpha-\beta),$$

ebenso die für $\cos(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha-\beta)$

zusammengezählt und wird auch je die zweite von der ersten abgezählt, so finden sich neue Gleichungen; diese aber gehen durch Einsetzen von

$$\gamma = \alpha + \beta \quad \text{und} \quad \delta = \alpha - \beta$$

über in die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\gamma + \sin\delta &= 2\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma-\delta}{2},\\
\sin\gamma - \sin\delta &= 2\cos\frac{\gamma+\delta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma-\delta}{2},\\
\cos\gamma + \cos\delta &= 2\cos\frac{\gamma+\delta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma-\delta}{2},\\
\cos\gamma - \cos\delta &= -2\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma-\delta}{2}.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(XI)}$$

Diese Formeln (prosthaphäretische Formeln, s. § 52, 1) ersetzen die Summe und den Unterschied durch ein Produkt, und dieses ist für logarithmische Rechnung geeigneter.

2. Die entsprechenden Formeln für tg und cotg sind:

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta},$$

$$\operatorname{cotg}\alpha \pm \operatorname{cotg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

3. Für die Summen und Unterschiede der Funktionen eines einzigen Winkels folgt gemäß der Formeln XI:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \cos(90^0 - \alpha) + \cos\alpha = 2\cdot\cos 45^0\cdot\cos(45^0 - \alpha)$$
$$= \sqrt{2}\,\cos(45^0 - \alpha) = \sqrt{2}\,\sin(45^0 + \alpha),$$
$$\sin\alpha - \cos\alpha = \cos(90^0 - \alpha) - \cos\alpha = -2\cdot\sin 45^0\cdot\sin(45^0 - \alpha)$$
$$\text{oder } = \sin\alpha - \sin(90^0 - \alpha) = 2\cos 45^0 \sin(\alpha - 45^0).$$

$$\operatorname{cotg}\alpha \pm \operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos^2\alpha \pm \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha},$$

woraus:

$$\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}, \qquad \operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{cotg} 2\alpha.$$

§ 39. Gebrauch der logarithmisch-goniometrischen Tafeln.

1. Zum Vervielfachen und Teilen der Winkelfunktionen dienen die Tafeln ihrer Logarithmen. In diesen Tafeln ist die Kennziffer oder Stellenzahl, sobald sie negativ sein sollte, um 10 zu groß angegeben, damit negative Zahlen vermieden werden. Bei der Bestimmung des Stellenwertes der zugehörigen Zahl selbst ist dies stets zu berücksichtigen, namentlich auch wenn der Logarithmus durch eine Zahl zu teilen ist; denn hierbei ist auf bekannte Weise die negative Kennziffer erst teilbar zu machen.

Man findet z. B.

$$\lg\sin 11^0 40' = 9{,}3058 - 10 = 0{,}3058 - 1 = \overline{1}{,}3058,$$
$$\lg\operatorname{tg} 5^0 20' = \overline{2}{,}9701, \qquad \lg\cos 65^0 30' = \overline{1}{,}6178.$$
$$\lg\operatorname{cotg} 82^0 40' = \overline{1}{,}1096.$$

Die Art der Einschaltung ist dieselbe wie in den andern Tafeln.

Ist z. B. $\lg\sin 31^0 38'$ zu bestimmen und gibt die Tafel nur:

$$\lg\sin 31^0 40' = \overline{1}{,}7201$$
$$\lg\sin 31^0 35' = \overline{1}{,}7191$$

so ist für 5′ der Unterschied in den letzten Stellen = 10,
also ist für 3′ „ „ „ „ „ „ = $10\cdot\frac{3}{5} = 6$,
somit $\lg\sin 31^0 38' = \overline{1}{,}7197$ (und $\sin 31^0 38' = 0{,}5844$).

Hierbei ist zu beachten, daß für lg cos und lg cotg der Unterschied von dem der Tafel entnommenen Wert des nächst kleineren Winkels abzuzählen ist.

Auch der dem gegebenen Winkel nächstliegende größere Winkel der Tafel kann benutzt werden. Es sei z. B. $\lg\cos 20^0 37'$ zu bestimmen, während gegeben:

$$\lg\cos 20^0 30' = \overline{1}{,}9716$$
$$\lg\cos 20^0 40' = 1{,}9711$$

somit ist der Unterschied für 10′ . . . . . = 0,0005,

also ist der Unterschied für $3' = 5 \cdot \frac{3}{10} = 1{,}5$ Einheiten der letzten Stelle, und dieser Unterschied ist hier zu $\lg\cos 20^0 40'$ zuzuzählen, weil cos mit abnehmendem Winkel zunimmt; also wird

$$\lg\cos 20^0 37' = \bar{1}{,}9713.$$

Die Tafel gibt übrigens selbst stets darüber Aufschluß, ob zu- oder abzuzählen ist, da der fragliche Wert zwischen den beiden anschließenden Werten der Tafel liegen muß.

2. Soll zu dem gegebenen Logarithmus einer Winkelfunktion der Winkel bestimmt werden, so sucht man zuerst die **nächst kleinere Zahl**; z. B. für $\lg\sin\alpha = \bar{1}{,}8271$ findet man zunächst $\bar{1}{,}8269 = \lg\sin 42^0 10'$, $\bar{1}{,}8276 = \lg\sin 42^0 15'$. Zum Unterschied 7 der letzten Stellen dieser aufeinanderfolgenden Tafelwerte gehört der Winkelunterschied $5'$; zum Unterschied der letzten Stellen der gegebenen Zahl und des nächstkleineren Tafelwertes $71 - 69 = 2$ gehört der Winkelunterschied $5 \cdot \frac{2}{7} = 1'$; somit ist $\alpha = 42^0 11'$. Ob zu- oder abzuzählen ist, ersieht man auch hier leicht aus der Tafel.

3. Für kleine Winkel unterscheiden sich $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{arc}\alpha$ nur wenig, von 0^0 bis $2^0 40'$ um weniger als 0,00005, so daß bei Benutzung von nur vierstelligen Werten für solche Winkel

$$\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{arc}\alpha$$

gesetzt werden kann. Auch bei vierstelligen Logarithmen ist bis zu 1^0:

$$\lg\sin\alpha' = \lg\operatorname{arc}\alpha' = \lg\operatorname{tg}\alpha'.$$

Da nun $\operatorname{arc}\alpha' = \frac{\pi\alpha}{180 \cdot 60} = \alpha \cdot \operatorname{arc} 1'$, so ist für solche kleine Winkel:

$\lg\sin\alpha' = \lg\operatorname{tg}\alpha' = \lg\operatorname{arc}\alpha = \lg\operatorname{arc} 1' + \lg\alpha = \bar{4}{,}4637 + \lg\alpha$, wobei $\lg\operatorname{arc} 1'$ als unveränderliche Größe $(= \bar{4}{,}4637)$ stets in Rechnung kommt. Z. B.: $\lg\sin 0^0 47' = \bar{4}{,}4637 + \lg 47 = \bar{4}{,}4637 + 1{,}6721$

$$= \bar{2}{,}1358 = \lg\operatorname{tg} 0^0 47'.$$

4. Umgekehrt, wenn der kleine Winkel α zu bestimmen ist zu

$$\lg\sin\alpha \quad \text{oder} \quad \lg\operatorname{tg}\alpha < 8{,}24 \; (= \lg\sin 1^0 = \lg\operatorname{tg} 1^0),$$

etwa $\lg\operatorname{tg}\alpha = \bar{2}{,}1072$, so ist $\lg\alpha' = \bar{2}{,}1072 - \bar{4}{,}4637 = 1{,}6435$, $\alpha = 44'$.

5. Für dieselbe Winkelgröße ist annähernd $\cos\alpha = 1$, $\lg\cos\alpha = 0$ zu setzen, während

$$\lg\operatorname{cotg}\alpha = -\lg\operatorname{tg}\alpha = -(\bar{4}{,}3637 + \lg\alpha),$$

wonach zu dem gegebenen kleinen Winkel lg cotg oder zu gegebenem lg ctg der Winkel bestimmt wird.

6. Ebenso läßt sich $\lg\cos\beta$, $\lg\operatorname{cotg}\beta$ und $\lg\operatorname{tg}\beta$ für Winkel berechnen, die nur um α Minuten kleiner als ein Rechter sind, indem dann $\cos\beta = \sin\alpha$, $\operatorname{cotg}\beta = \operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta = 1 : \operatorname{tg}\alpha$, also $\lg\operatorname{tg}\beta = -\lg\operatorname{tg}\alpha$ ist.

Z. B. $\lg \cos 89^\circ 51' = \lg \sin 9' = \bar{4},4637 + 0,9542 = \bar{3},4179$,

$\lg \operatorname{cotg} \beta = 8,2041 \ (< 8,24) = \lg \operatorname{tg} \alpha', \quad \alpha' = \bar{2},2041 - \bar{4},4637 = 1,7404,$

$$\alpha = 55', \quad \beta = 89^\circ 5'.$$

Ebenso $\lg \operatorname{tg} \beta = -(\lg \alpha + \bar{4},4637)$.
Hier ist dann nahezu

$$\sin \beta = 1, \qquad \lg \sin \beta = 0.$$

§ 40. Berechnung von Seiten und Winkeln des rechtwinkeligen Dreiecks.

1. Mit Hilfe der Tafeln für die Winkelfunktionen lassen sich bei einem Dreieck oder bei irgend einer Figur, von welcher die zur Zeichnung genügende Zahl von Strecken und Winkeln gegeben ist, die übrigen Strecken und Winkel berechnen. Solche Berechnung von Stücken eines Dreiecks mittels der Winkelfunktionen ist der Gegenstand der Dreiecksberechnung oder Trigonometrie.

2. Wenn das Dreieck ein rechtwinkeliges ist, so geben die vier Winkelfunktionen im Verein mit dem Pythagoreischen Lehrsatz und mit dem Satz von der Winkelsumme im Dreieck sofort die Beziehungen zwischen den gegebenen und den gesuchten Stücken.

Fig. 153.

Völlig bestimmt ist das Dreieck durch zwei Stücke, wenn unter diesen eine Seite vorkommt. Hiernach gibt es je nach der Zusammenstellung der gegebenen Stücke die nachfolgenden fünf Hauptaufgaben.

3. *Es sei gegeben die Hypotenuse und ein Winkel*, etwa c und a. — Dann ist:

$$a = c \sin \alpha, \qquad b = c \cos \alpha.$$

$c = 9,37$
$\alpha = 76^\circ 44'$

$\lg \sin \alpha$	$\bar{1},9883$
$\lg c$	$0,9717$
$\lg \cos \alpha$	$\bar{1},3607$
$\lg a$	$0,9600$
$\lg b$	$0,3324$

$a = 9,12$
$b = 2,15.$

4. *Es sei gegeben eine Kathete und ihr Gegenwinkel*, etwa a und α. — Dann ist:

$$c = \frac{a}{\sin \alpha}, \qquad b = a \operatorname{cotg} \alpha.$$

$a = 9,12$
$\alpha = 76^\circ 44'$

$\lg \sin \alpha$	$\bar{1},9883$
$\lg a$	$0,9600$
$\lg \operatorname{cotg} \alpha$	$\bar{1},3725$
$\lg c$	$0,9717$
$\lg b$	$0,3325$

$c = 9,369$
$b = 2,150.$

5. *Es sei gegeben eine Kathete und ihr Anwinkel,* etwa a und β. — Dann ist:

$$c = \frac{a}{\cos\beta}, \qquad b = a \operatorname{tg}\beta.$$

$a = 9{,}12$
$\beta = 13^0 16'$

$\lg\cos\beta$	$\bar{1}{,}9863$
$\lg a$	$0{,}9600$
$\lg\operatorname{tg}\beta$	$\bar{1}{,}3725$
$\lg c$	$0{,}9717$
$\lg b$	$0{,}3325$

$c = 9{,}369$
$b = 2{,}150.$

6. *Es sei gegeben die Hypotenuse und eine Kathete,* etwa c und a. — Dann ist:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta, \qquad b = \sqrt{(c+a)\,(c-a)}.$$

$c = 9{,}37$
$a = 9{,}12$
$c + a = 18{,}49$
$c - a = \ \ 0{,}25$

$\lg a$	$\bar{1}{,}9600$
$\lg c$	$0{,}9717$
$\lg\sin\alpha$	$\bar{1}{,}9883$

$\alpha = 76^0 44'$
$\beta = 13^0 16'$

$\lg(c+a)$	$1{,}2669$
$\lg(c-b)$	$\bar{1}{,}3979$
$2\lg b$	$0{,}6648$
$\lg b$	$0{,}3324$

$b = 2{,}15.$

7. *Es seien gegeben die beiden Katheten* a und b. — Dann ist:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \operatorname{cotg}\beta, \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$a = 9{,}12$
$b = 2{,}15$

$\lg a$	$0{,}9600$
$\lg b$	$0{,}3324$
$\lg\operatorname{tg}\alpha$	$0{,}6276$

$\alpha = 76^0 44'$
$\beta = 13^0 16'.$

Wenn α bestimmt ist, so wird c wie in 4 berechnet.

8. Das gleichschenkelige Dreieck wird durch seine Mittellinie in zwei rechtwinkelige zerlegt; eines dieser wird dann behandelt, wie eben gezeigt wurde.

§ 41. Anwendung der Winkelfunktionen auf Berechnungen im Kreis.

1. Für eine Sehne und ihren Umfangs- oder halben Mittelpunktswinkel α in einem Kreis mit dem Halbmesser r gilt die Gleichung $s = 2r \cdot \sin\alpha$ (S. 125, § 34, 5), für die Seiten des ein- und umbeschriebenen regelmäßigen n-ecks (S. 126, § 34, 5 und § 37, 7):

$$s_n = 2r \sin\frac{180^0}{n}, \qquad t_n = 2r \operatorname{tg}\frac{180^0}{n},$$

wobei die Werte für sin und tg aus § 35 und § 37 als Wurzelausdrücke oder aus den Tafeln als Dezimalbrüche entnommen werden

können. In letzterem Fall kann die Seite jedes Vielecks berechnet werden, z. B.:

$$s_9 = 2r \cdot \sin 20^0, \qquad t_7 = 2r \cdot \operatorname{tg} 25^0 43'.$$

2. Zur Berechnung des Inhaltes E_n des einbeschriebenen n-ecks bestimmt man noch den Abstand der Seite vom Mittelpunkt $x_n = r \cos \frac{180^0}{n}$ (S. 125, § 34, 5) und findet:

$$E_n = \frac{n}{2} \cdot 2r \sin \frac{180^0}{n} \cdot r \cos \frac{180^0}{n} = \frac{nr^2}{2} \sin \frac{360^0}{n}$$

mit Anwendung von Formel III (S. 127, § 35, 1).

Für das umbeschriebene Vieleck ist der Abstand der Seite vom Mittelpunkt $= r$, daher

$$U_n = nr^2 \operatorname{tg} \frac{180^0}{n}.$$

Da $r = \frac{t_n}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{180^0}{n}$, so ist auch $U_n = \frac{n}{4} t_n^2 \operatorname{cotg} \frac{180^0}{n}$,

wonach der *Inhalt eines regelmäßigen Vielecks aus gegebener Seite* berechnet wird.

3. Der Umfang des Kreises πd liegt immer zwischen den Umfängen der ein- und umbeschriebenen Vielecke (S. 117, § 31, 3):

$$n d \sin \frac{180^0}{n} < \pi d < nd \operatorname{tg} \frac{180^0}{n},$$

also:

$$n \sin \frac{180^0}{n} < \pi < n \operatorname{tg} \frac{180^0}{n}.$$

Zum Beispiel für $n = 60$: $\quad 60 \sin 3^0 < \pi < 60 \operatorname{tg} 3^0$;

oder da (S. 131, § 36, 4)

$$\sin 3^0 = 0{,}05233597, \qquad \operatorname{tg} 3^0 = 0{,}05240778,$$
$$3{,}1401582 < \pi < 3{,}1444668.$$

Gemäß § 31, 3, Zus. (S. 117) erhält man hieraus annähernd:

$$\pi = \frac{2 \cdot 3{,}1401582 + 3{,}1444668}{3},$$

$$\pi = 3{,}141594 \quad \text{statt} \quad 3{,}1415926.$$

4. Für die Berechnung des Kreisbogens b und Kreisausschnittes S aus dem Halbmesser r und dem Mittelpunktswinkel α ist

$$\boldsymbol{b = r \operatorname{arc} \alpha, \qquad S = \frac{r^2}{2} \operatorname{arc} \alpha.}$$

Hier wird arc α der Arcustafel entnommen oder bei logarithmischer Rechnung $\operatorname{arc} \alpha^0 = \alpha \cdot \operatorname{arc} 1^0$ gesetzt, wobei $\operatorname{arc} 1^0 = \frac{\pi}{180}$, $\lg \operatorname{arc} 1^0 = \bar{2}{,}2419$ als unveränderliche Größe in Rechnung kommt. (Ebenso für Winkel in Minuten $\lg \operatorname{arc} 1' = \bar{4}{,}4637$). Z. B. für $r = 13{,}25$, $\alpha = 12^0 38' = 12{,}63^0$:

$\lg r$	1,1222
$\lg r$	1,1222
$\lg \alpha^0$	1,1014
$\lg \text{arc } 1^0$	$\bar{2}$,2419
$-\lg 2$	$\bar{1}$,6990
$\lg S$	1,2867, $S = 19{,}35$.

Umgekehrt ergibt sich, wenn r und b oder S gegeben sind, der Winkel α aus:

$$\lg \alpha^0 = \lg 2 + \lg S - 2 \lg r - \lg \text{arc } 1^0.$$

5. Zur Berechnung des Kreisabschnittes, wenn der Halbmesser r und der Mittelpunktswinkel α gegeben sind, wird von dem Kreisausschnitt $\frac{r^2}{2} \text{arc } \alpha$ das zugehörige Dreieck $\frac{sx}{2}$ abgezählt, wobei $\frac{s}{2} = r \sin \frac{\alpha}{2}$ und $x = r \cos \frac{\alpha}{2}$ ist, also

$$\frac{sx}{2} = r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{r^2}{2} \sin \alpha \text{ (nach Formel III)},$$

also:

$$\sum = \frac{r^2}{2} (\text{arc } \alpha - \sin \alpha).$$

Hier wird am kürzesten $\text{arc}\,\alpha$ und $\sin \alpha$ unmittelbar aus den Tafeln entnommen (auch bei Einschaltung).

Zusatz. Für den Fall, daß $\sphericalangle \alpha$ stumpf ist, wird nach § 42 (S. 143) $\sin \alpha = \sin (180^0 - \alpha)$ gesetzt; wenn α überstumpf ist, wird (da dann das Dreieck zuzuzählen ist) statt $-\sin \alpha$ nun $+\sin (360^0 - \alpha)$ oder $\sin (\alpha - 180^0)$ gesetzt (vgl. § 48, 2).

Zehntes Kapitel.

Die Winkelfunktionen im schiefwinkeligen Dreieck.

§ 42. Die Funktionen stumpfer Winkel.

1. Um die Winkelfunktionen auch auf größere Winkel als einen Rechten anzuwenden, trägt man auf den einen Schenkel eines solchen Winkels α eine Strahlstrecke c ab, fällt von deren Endpunkt die Senkrechte (Ordinate) a auf den anderen Schenkel, auf dem sie einen Abschnitt (eine Abszisse) AC begrenzt. Hierdurch entsteht neben dem Winkel α ein rechtwinkeliges Dreieck, in dem die Strahlstrecke an Stelle der Hypotenuse, die Senk-

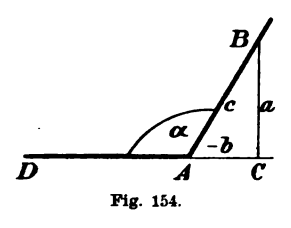


Fig. 154.

rechte an Stelle der Gegenkathete des Winkels und der Abschnitt an Stelle der Ankathete tritt, so daß die Bestimmungen der Winkelfunktionen sofort auf dieses Dreieck übertragen werden können; sie sind auch hier schon durch den Winkel allein bestimmt — und umgekehrt. Dabei ist jedoch noch ein Gegensatz gegenüber der Lage bei spitzen Winkeln hervorzuheben, der durch das negative Vorzeichen zum Ausdruck kommt.

2. Behält man wie in Fig. 148 (S. 128) die Länge der Strahlstrecke für einen von 0^0 ab wachsenden Winkel unverändert bei, so wird die Ankathete immer kürzer, bis sie bei 90^0 zu Null wird. Überschreitet dann der Winkel einen Rechten, so erhält der Abschnitt AC (Fig. 154), der der Ankathete entspricht, die gegengesetzte Lage vom Scheitel aus: er wird deshalb mit dem negativen Vorzeichen versehen $= -b$. Die Zahlengröße für diesen Abschnitt nimmt also gleichsam noch weiter ab und erreicht bei zwei Rechten die negative Größe der Strahlstrecke. Dadurch werden *bei stumpfen Winkeln die drei mit der Ankathete gebildeten Winkelfunktionen negativ*: $\cos\alpha = \frac{-b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{-b}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{-b}{a}$.

Der entsprechende Winkel des angeschlossenen rechtwinkeligen Dreiecks ist der Nebenwinkel zu α, also $\doteq 180^0 - \alpha$. Hieraus folgt für die Bestimmung der Funktionen stumpfer Winkel:

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= +\sin(180^0-\alpha), & \operatorname{tg}\alpha &= -\operatorname{tg}(180^0-\alpha),\\ \cos\alpha &= -\cos(180^0-\alpha), & \operatorname{cotg}\alpha &= -\operatorname{ctg}(180^0-\alpha).\end{aligned} \qquad \text{XII.}$$

Z. B. $\sin 135^0 12' = \sin(179^0 60' - 135^0 12') = +\sin 44^0 48'$,
$\cos 108^0 10' = -\cos 71^0 50'$, $\operatorname{tg} 148^0 15' = -\operatorname{tg} 31^0 45'$.

Wenn umgekehrt die negative Funktion gegeben ist, so sucht man zunächst den entsprechenden Winkel der ersten Viertelsdrehung, z. B.

$$\operatorname{cotg}\alpha = -5{,}352,\quad \lg\operatorname{cotg}\alpha = 0{,}7285\,(-),$$
$$\alpha = 10^0 35'\,(\text{II}) = 180^0 - 10^0 35' = 169^0 25'.$$

3. Die Vergleichung dieser Werte mit denen im ersten Viertel der Drehung zeigt, daß im 2. Viertel mit wachsendem Winkel der Sinus im selben wechselnden Verhältnis, wie er im 1. Viertel zunimmt, nun symmetrisch abnimmt von $\sin 90^0 = +1$ bis $\sin 180^0 = 0$, der Cosinus negativ wächst von $\cos 90^0 = 0$ bis $\cos 180^0 = -1$, die Tangens alle Werte annimmt von $-\infty$ bis 0 und Cotangens von 0 bis $-\infty$.

Die Erweiterung der Funktionen bloß auf stumpfe Winkel genügt für die eigentliche Dreiecksrechnung oder Trigonometrie. Später (§ 48) wird noch die Erweiterung auf überstumpfe Winkel notwendig werden.

4. Für $\alpha > 90^0$ folgt nun noch $\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha)$ oder auch $= \sin[90^0 - (\alpha - 90^0)] = \cos(\alpha - 90^0)$ nach Formel I (S. 124). So ergibt sich für *die Bestimmung der Funktionen stumpfer Winkel* der für die Rechnung einfachere Weg, *vom Winkel* 90^0 *abzuzählen und die verwandten Funktionen (mit entsprechendem Vorzeichen) zu nehmen:*

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha &= +\cos(\alpha-90^0), & \operatorname{tg}\alpha &= -\operatorname{ctg}(\alpha-90^0),\\ \cos\alpha &= -\sin(\alpha-90^0), & \operatorname{cotg}\alpha &= -\operatorname{tg}(\alpha-90^0).\end{aligned}\right\}\ \textbf{XII a.}$$

Z. B. $\cos 119^0 34' = -\sin 29^0 34'$.

5. Daß die Formeln für den Zusammenhang der vier Funktionen eines Winkels, nämlich II (S. 125), IX und X (S. 133) und die daraus abgeleiteten auch für stumpfe Winkel gelten, ergibt sich unmittelbar wie dort aus den Beziehungen der Seiten des rechtwinkeligen Dreiecks (c, a, $-b$). Ebenso behalten die Formeln für Summe und Unterschied zweier Winkel VI, VII (S. 130) ihre Geltung. Dies läßt sich nachweisen, indem man die Funktionen auf solche von spitzen Winkeln zurückführt.

Ist $180^0 > (\alpha+\beta) > 90^0$, so lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

a) Die einzelnen Winkel α und β sind kleiner als 90^0; dann ist

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin(180^0-\alpha-\beta) = \sin[(90^0-\alpha)+(90^0-\beta)]\\ &= \sin(90^0-\alpha)\cdot\cos(90^0-\beta)+\cos(90^0-\alpha)\cdot\sin(90^0-\beta)\\ &= \cos\alpha\,\sin\beta+\sin\alpha\,\cos\beta.\end{aligned}$$

Ebenso $\cos(\alpha+\beta) = -\cos[(90^0-\alpha)+(90^0-\beta)]$ usw.

b) Ist aber ein Winkel, etwa $\alpha > 90^0$, $\beta < 90^0$, also $180^0-\alpha < 90^0$,

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(180^0-(\alpha+\beta)] = \sin[(180^0-\alpha)-\beta]$ usw.

$\cos(\alpha+\beta) = -\cos[(180^0-\alpha)-\beta]$ usw.

Die Formeln für $(\alpha-\beta) > 90^0$ [oder mindestens $\alpha > 90^0$] erhält man, indem man $180^0-(\alpha-\beta)$ umsetzt in $(180^0-\alpha)+\beta$ und hierauf die eben abgeleiteten Formeln anwendet.

Die Formeln für den halben und doppelten Winkel III, IV, V (S. 127) behalten ebenfalls ihre Geltung, da sie als besondere Fälle aus VI abgeleitet werden können (s. S. 130), und ebenso gelten dann alle übrigen abgeleiteten Formeln von § 37 und 38.

§ 43. Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln des schiefwinkeligen Dreiecks.

1. Durch eine Höhe $h \perp c$ wird ein schiefwinkeliges Dreieck in zwei rechtwinkelige zerlegt (Fig. 155).

Es ist:

$h = a\cdot\sin\beta$ (in Fig. 155, b ist $h = a\cdot\sin\delta = a\cdot\sin\beta$)

ferner: $h = b\cdot\sin\alpha$ (in Fig. 155, c ist $h = b\cdot\sin\varepsilon = b\cdot\sin\alpha$),

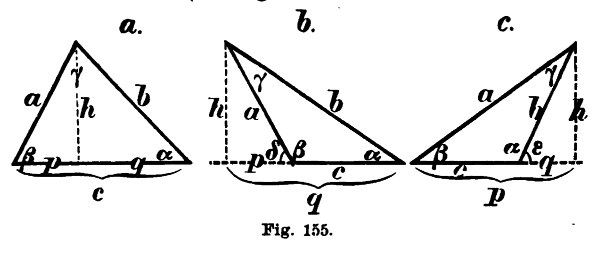


Fig. 155.

also: $$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$$

oder $$\mathbf{a : b = \sin\alpha : \sin\beta}. \qquad \textbf{XIII.}$$

Ebenso würde die Benützung der beiden andern Höhen ergeben:

$$b : c = \sin\beta : \sin\gamma \qquad \text{und} \qquad a : c = \sin\alpha : \sin\gamma,$$

oder zusammengefaßt: $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.

Dies ist der sogenannte **Sinussatz:**

Die Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die Sinus ihrer Gegenwinkel.

Zusatz. Ein zweiter Beweis ergibt sich unter Benützung des Dreiecks-Umkreises. Ist dessen Durchmesser d, so ist (S. 125, § 34, 5)

$$a = d \sin\alpha \qquad \text{oder} \qquad d = \frac{a}{\sin\alpha} \qquad \text{oder} \qquad = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Anmerkung. Der Sinussatz schließt auch für den besonderen Fall, daß etwa $\sphericalangle\, \gamma = R$ ist, die Erklärung in § 34, 1 (S. 124) in sich; er umfaßt auch die Sätze in Teil I, § 17, 2b und § 18, 1 und ergänzt sie durch die bestimmte Angabe über den Wert des Seitenverhältnisses.

2. Nach dem allgemeinen Pythagoreischen Satz (S. 94, § 27, 2) ist:

$$a^2 = b^2 + c^2 \mp 2cq.$$

Wenn nämlich $\sphericalangle\, \alpha$ spitz (Fig. 155, a und b), so gilt das obere Zeichen, und es ist $q = b \cos\alpha$; wenn aber $\sphericalangle\, \alpha$ stumpf ist (Fig. 155, c), so gilt das untere Zeichen, und es ist $q = b \cos\varepsilon = -b \cos\alpha$. In jedem Fall gilt also die folgende (trigonometrische) Form des allgemeinen Pythagoreischen Satzes:

XIV. $$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha;} \qquad \text{ebenso:}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos\beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma.$$

Dies ist der **Cosinussatz:**

In jedem Dreieck ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten vermindert um das doppelte Produkt dieser Seiten und des Cosinus ihres Zwischenwinkels.

3. Eine Seite ist die Summe ihrer Abschnitte unter den andern Seiten. So ist in Fig. 155, a:

$$p = a \cdot \cos\beta, \qquad q = b \cdot \cos\alpha \qquad \text{und: } c = p + q:$$

in Fig. 155, b:

$$p = a \cdot \cos\delta = -a \cdot \cos\beta, \qquad q = b \cdot \cos\alpha \qquad \text{und: } c = -p + q;$$

in Fig. 155, c:

$$p = a \cdot \cos\beta, \qquad q = b \cdot \cos\varepsilon = -b \cdot \cos\alpha \text{ und: } c = p - q;$$

also ist in jedem Falle:

$$c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha; \qquad \text{ebenso:}$$
$$b = c \cdot \cos\alpha + a \cdot \cos\gamma$$
$$a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta.$$

Dies ist der sogenannte Satz der Abschnitte (Projektionssatz).

Die erste dieser Formeln gibt:

$$b \cdot \cos\alpha = c - a \cdot \cos\beta,$$

der Sinussatz gibt:

$$b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta.$$

Das Quadrieren und Addieren dieser Gleichungen führt zu dem Cosinussatz.

Teilt man durch diese Gleichung die vorangehende, so erhält man die (auch aus der Fig. 155 unmittelbar ablesbare) Gleichung:

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{c-p}{h} = \frac{c - a \cdot \cos\beta}{a \cdot \sin\beta} \qquad \text{oder:}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{c}{a \cdot \sin\beta} - \operatorname{cotg}\beta. \qquad \text{XV.}$$

Dies ist die sog. **Cotangensformel.**

4. a) Wird im $\triangle ABC$ (Fig. 156) $AS = AU = c$ abgetragen, so wird $CS = (b + c)$ und $CU = (b - c)$. Zieht man noch BS und BU, so wird $\triangle BAS$ gleichschenkelig, also ist $\sphericalangle S = \frac{\alpha}{2}$; $\sphericalangle SBU$ ist als Umfangswinkel im Halbkreis $= R$, und wird noch $CF \parallel UB$ oder $\perp SB$ gezogen, so ist im $\triangle FCS$

$$\sphericalangle(\gamma + \delta) = 90^0 - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta + \gamma}{2},$$

somit $\quad \sphericalangle \delta = \frac{\beta + \gamma}{2} - \gamma = \frac{\beta - \gamma}{2}.$

Nun verhält sich aber

$$(b - c) : (b + c) = CU : CS = FB : FS$$
$$= CF \cdot \operatorname{tg}\delta : CF \cdot \operatorname{tg}(\gamma + \delta).$$

Fig. 156.

Also: $$\operatorname{tg}\frac{\beta - \gamma}{2} : \operatorname{tg}\frac{\beta + \gamma}{2} = (b - c) : (b + c). \qquad \text{XVI.}$$

Dies ist der **Tangenssatz:**

In jedem Dreieck verhält sich die Tangens des halben Unterschiedes zweier Winkel zur Tangens ihrer halben Summe wie der Unterschied ihrer Gegenseiten zu deren Summe.

b) Ein zweiter Beweis dieses Satzes ergibt sich aus dem Sinussatz; man leitet nämlich aus

$\sin\alpha : \sin\beta = b : c$ (nach § 2, 5a) ab:

$$(\sin\alpha - \sin\beta) : (\sin\alpha + \sin\beta) = (b - c) : (b + c)$$

und formt nun die linke Seite um nach § 38, 1 (XI.).

5. Statt dieses Satzes können auch folgende zwei Formeln benutzt werden. Im $\triangle FCB$ (Fig. 156) ist:

$$a \sin\delta = FB = CU \cos\frac{\alpha}{2},$$

$$a \cos\delta = FC = CS \sin\frac{\alpha}{2},$$

also:

$$\left.\begin{aligned} a \sin\frac{\beta-\gamma}{2} &= (b-c)\cos\frac{\alpha}{2} \\ a \cos\frac{\beta-\gamma}{2} &= (b+c)\sin\frac{\alpha}{2} \end{aligned}\right\}. \qquad \textbf{XVI a.}$$

Dies sind die Cagnolischen Formeln (meist nach Mollweide benannt)*, aus denen durch Teilung der Tangenssatz (XVI) folgt.

6. Zeichnet man den Inkreis des Dreiecks, so bilden seine Berührungspunkte auf den Seiten Abschnitte, deren Größen schon im I. Teil, § 35, 2 angegeben wurden. Wenn $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$, so ist

$$s_1 = s - a, \quad s_2 = s - b, \quad s_3 = s - c,$$

während der Halbmesser des Kreises ϱ nach § 27, 6 (S. 97) berechnet wird.

Fig. 157.

Es ist
$$\varrho = \sqrt{\frac{s_1 s_2 s_3}{s}},$$

und aus der Figur folgt unmittelbar:

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{s_1}{\varrho}, \quad \cot\frac{\beta}{2} = \frac{s_2}{\varrho}, \quad \cot\frac{\gamma}{2} = \frac{s_3}{\varrho}. \qquad \textbf{XVII.}$$

Anmerkung. Aus dem Cosinussatz folgt:

$$1 + \cos\alpha = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} = \frac{2s \cdot 2s_1}{2bc},$$

somit (S. 127, § 35, 2): $2\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2ss_1}{bc}$, $\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{ss_1}{bc}}$. Ebenso:

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2s_2 s_3}{bc}, \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s_2 s_3}{bc}}.$$

Teilt man die erste Formel durch die zweite, so ergibt sich wieder wie vorhin:

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{ss_1}{s_2 s_3}} = s_1\sqrt{\frac{s}{s_1 s_2 s_3}} = \frac{s_1}{\varrho}.$$

* Man merke sich, daß in den Formeln für die Hälfte von Winkeln [hier wie in § 35, 2 IV und in den Formeln der folgenden Anmerkung (in 6)] dem *sinus minus* gegenübersteht, dem *cosinus plus.*

§ 44. Berechnung von Seiten und Winkeln im Dreieck.

1. Ein Dreieck ist bestimmt durch drei voneinander unabhängige Stücke; unter diesen muß also mindestens eine Seite sein. — Je nach der Zusammenstellung der gegebenen Stücke hat man vier Hauptaufgaben zu unterscheiden. Diese werden im folgenden gelöst.

2. *Es seien eine Seite und ihre beiden Anwinkel gegeben, etwa* a, β und γ. — Dann ist auch der dritte Winkel bestimmt, nämlich: $\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$. Die Seiten b und c ergibt der Sinussatz, nämlich:

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}, \qquad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha},$$

wobei $\sin \alpha = \sin(\beta + \gamma)$ gesetzt werden kann.

Beispiel:

$$\begin{array}{r|l}
a = & 5{,}32 \\
\beta = & 55^0 48' \\
\gamma = & 64^0 23' \\
\hline
\beta + \gamma = & 120^0 11' \\
\alpha = & 59^0 49'
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
\lg \sin \beta & \bar{1}{,}9175 \\
\lg a & 0{,}7259 \\
-\lg \sin \alpha & 0{,}0633 \\
\lg \sin \gamma & \bar{1}{,}9551 \\
\hline
\lg b & 0{,}7067 \\
\lg c & 0{,}7443
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\
b = 5{,}090 \\
c = 5{,}550
\end{array}$$

3. *Es seien zwei Seiten und ihr Zwischenwinkel gegeben,* etwa b, c und α (wobei $b > c$).

a) Wenn b und c Zahlen sind, deren Quadrate leicht (ohne Logarithmen) berechnet werden, so nimmt man zur *Berechnung der dritten Seite* den Cosinussatz:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha};$$

zur *Berechnung eines Winkels* kann die Cotangensformel XV dienen:

$$\operatorname{cotg} \beta = \frac{c}{b \sin \alpha} - \operatorname{cotg} \alpha$$

oder

$$\operatorname{cotg} \gamma = \frac{b}{c \sin \alpha} - \operatorname{cotg} \alpha.$$

Beispiel:

$$\begin{array}{l|}
b = 15 \\
c = 13 \\
\alpha = 59^0 29' \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
b^2 = 225 \\
c^2 = 169 \\
\hline
b^2 + c^2 = 394 \\
2bc \cos \alpha = 198 \\
\hline
a^2 = 196 \\
a = 14
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
\multicolumn{2}{c}{2bc = 390} \\
\lg 2bc & 2{,}5911 \\
\lg \cos \alpha & \bar{1}{,}7056 \\
\hline
\lg 2bc \cos \alpha & 2{,}2967
\end{array}$$

$\lg c$	1,1139
$\lg \sin \alpha$	$\overline{1},9352$
$\lg c \sin \alpha$	1,0491
$\lg b$	1,1761
$\lg \frac{b}{c \sin \alpha}$	0,1270

$$\frac{b}{c \sin \alpha} = 1{,}340$$
$$\operatorname{cotg} \alpha = 0{,}589$$
$$\operatorname{cotg} \gamma = 0{,}751$$
$$\lg \operatorname{cotg} \gamma = \overline{1},8756$$
$$\gamma = 53^0 6'$$

b) Wenn b und c mehrzifferige Zahlen sind, und es wird *die dritte Seite verlangt,* so verwendet man den Cosinussatz in abgeänderter Form: man setzt in $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ den Wert

$$\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

oder

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

ein (nach S. 127, § 35, 2, IV) und findet so:

$$a^2 = (b + c)^2 - 4bc \cos^2 \frac{\alpha}{2} = (b + c)^2 - \left(2\sqrt{bc} \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 \text{ und}$$

$$a^2 = (b - c)^2 + 4bc \sin^2 \frac{\alpha}{2} = (b - c)^2 + \left(2\sqrt{bc} \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

So ist die Formel für die logarithmische Rechnung bequemer als zuvor. Setzt man noch

$$2 \cdot \sqrt{bc} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = m,$$

so wird

$$a = \sqrt{(b + c + m)(b + c - m)}.$$

Beispiel:

$b = 39{,}6$
$c = 28{,}2$
$\alpha = 47^0 36'$

$\frac{\alpha}{2} = 23^0 48'$

$\lg 2$	0,3010
$\frac{1}{2} \lg b$	0,7988
$\frac{1}{2} \lg c$	0,7251
$\lg \cos \frac{\alpha}{2}$	$\overline{1},9614$
$\lg m$	1,7863
$\lg(b + c + m)$	2,1103
$\lg(b + c - m)$	0,8261
	2,9364
$\lg a$	1,4682

b	39,6
c	28,2
$b + c$	67,8
m	61,1
$b + c + m$	128,9
$b + c - m$	6,7

$a = 29{,}39$

c) Noch in anderer Weise läßt sich die Formel

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

zu bequemerer logarithmischer Rechnung umgestalten. Man setzt dafür

$$a^2 = b^2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}\right) + c^2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$- 2bc\cdot\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right),$$

oder
$$a^2 = \left[(b+c)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right]^2 + \left[(b-c)\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right]^2,$$

was auch leicht aus XVIa (S. 147) hervorgeht
Auch so wird die Ausrechnung von nur zwei Posten verlangt.

d) Wenn b und c mehrzifferige Zahlen sind, und es werden *die beiden Gegenwinkel verlangt*, so findet man durch den Tangenssatz $\frac{\beta-\gamma}{2}$, und da $\frac{\beta+\gamma}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$ bekannt ist, so werden damit β und γ bestimmt.

Beispiel:

$b = 2{,}81$	$b-c = 0{,}26$	$\lg(b-c)$	1,4150	$\frac{\beta-\gamma}{2} = 4^0 49{,}5'$
$c = 2{,}55$	$b+c = 5{,}36$	$\lg(b+c)$	0,7292	$\frac{\beta+\gamma}{2} = 60^0 7'$
$\alpha = 59^0 46'$	$\frac{\alpha}{2} = 29^0 53'$	$\lg\frac{b-c}{b+c}$	$\bar{2}{,}6858$	$\beta = 64^0 56{,}5'$
	$\frac{\beta+\gamma}{2} = 60^0 7'$	$\lg\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}$	0,2406	$\gamma = 55^0 17{,}5'$
		$\lg\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}$	$\bar{2}{,}9264$	$\alpha = 59^0 46'$
				$180^0\ 0'.$

Die dritte Seite a läßt sich nun mittels des Sinussatzes finden.

e) Wenn bei mehrzifferigen Werten von b und c *die drei übrigen Stücke zugleich verlangt* werden, so erfordern die Cagnolischen Formeln den geringsten Aufwand in Benützung der Tafeln (sieben Ablesungen auf höchstens 5 Seiten) und geben noch durch doppelte Berechnung der Seite eine Rechenprobe. Man bildet nämlich aus beiden Formeln

$$\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{a\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{a\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

und berechnet hiernach $\frac{\beta-\gamma}{2}$ aus

$$\lg\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2} = \lg\left[a\ \sin\frac{\beta-\gamma}{2}\right] - \lg\left[a\ \cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right]$$

und nimmt

$$\frac{\beta+\gamma}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$$

hinzu, um β und γ zu erhalten.

Hierzu ergibt sich folgende Anordnung der Rechnung:

$\lg(b-c)$	$\bar{1},4150$	$\lg(b+c)$	$0,7292$		
$\lg\cos\frac{\alpha}{2}$	$\bar{1},9380$	$\lg\sin\frac{\alpha}{2}$	$\bar{1},6974$		
$\lg a\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$	$\bar{1},3530$	$\lg a\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$	$0,4266$	$\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)$	$\bar{2},9264$
$\lg\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$	$\bar{1},9249$	$\lg\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$	$\bar{1},9985$	$\frac{\beta-\gamma}{2} = 4^0 49,5'$	
$\lg a$	$0,4281$	$\lg a$	$0,4281$	$\frac{\beta+\gamma}{2} = 60^0 7'$	
	$a = 2,68$			$\beta = 64^0 56,5'$	
				$\gamma = 55^0 17,5'$.	

4. *Es seien die drei Seiten gegeben,* also a, b, c.

a) Wenn die Zahlen rasch quadriert werden können, so gibt der Cosinussatz:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \qquad \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \qquad \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Beispiel:

	Q	cos	lg cos	
$a = 13$	169	$\frac{252}{420} = 0,6$	$\bar{1},7782$	$\alpha = 53^0\ 8'$
$b = 14$	196	$\frac{198}{390} = \frac{33}{65}$	$\bar{1},7056$	$\beta = 59^0 29'$
$c = 15$	225	$\frac{140}{364} = \frac{5}{13}$	$\bar{1},5850$	$\gamma = 67^0 23'$
				$180^0\ 0'$.

b) Wenn die gegebenen Zahlen mehrzifferig sind, so berechnet man zunächst den Halbmesser ϱ des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises:

$$\varrho = \sqrt{\frac{s_1 s_2 s_3}{s}},$$

worauf sich die Winkel ergeben aus XVII:

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{s_1}{\varrho}, \qquad \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} = \frac{s_2}{\varrho}, \qquad \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \frac{s_3}{\varrho}.$$

Beispiel:

		lg	lg cotg	
$a = 2,68$	$s = 4,02$	$\bar{1},3958 = -\lg s$	$0,2406$	$\frac{\alpha}{2} = 29^0 53'$
$b = 2,81$	$s_1 = 1,34$	$0,1271$	$0,1963$	$\frac{\beta}{2} = 32^0 28'$
$c = 2,55$	$s_2 = 1,21$	$0,0828$	$0,2808$	$\frac{\gamma}{2} = 27^0 39'$
$2s = 8,04$	$s_3 = 1,47$	$0,1673$		$\alpha = 59^0 46'$
	$2\lg\varrho$	$\bar{1},7730$		$\beta = 64^0 56'$
	$\lg\varrho$	$\bar{1},8865$		$\gamma = 55^0 18'$
	$-\lg\varrho$	$0,1135$		$180^0\ 0'$.

c) Zur Lösung lassen sich auch die Formeln für $\cos\frac{\alpha}{2}$ und $\sin\frac{\alpha}{2}$ (aus § 43, 6, Anmerkung) verwenden.

5. *Es seien zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen gegeben,* etwa a, b, α. — Dann ist nach dem Sinussatz:

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\cdot\sin\alpha.$$

Da zu einem gegebenen positiven Sinus sowohl ein spitzer Winkel als auch dessen Nebenwinkel gehört, so ist die Aufgabe im allgemeinen zweideutig.

Ist jedoch $a > b$, so muß auch $\alpha > \beta$, d. h β ein spitzer Winkel sein. Unmöglich ist die Aufgabe, wenn $b\sin\alpha > a$ ist, weil $\sin\beta < 1$ sein muß.

Beispiel:

Gegeben	Rechnung		Ergebnis
$a = 2{,}68$	$\lg b$	$0{,}4487$	
$b = 2{,}81$	$\lg\sin\alpha$	$\bar{1}{,}9365$	$\beta_1 = 64^0 57'$
$\alpha = 59^0 46'$	$-\lg a$	$\bar{1}{,}5719$	$\beta_2 = 115^0\ 3'$
	$\lg\sin\beta$	$\bar{1}{,}9571$	

Die dritte Seite des Dreiecks kann nun nach 2 berechnet werden.

§ 45. Berechnung des Inhaltes des Dreiecks, der Halbmesser seiner Kreise und weiterer Stücke.

1. Da im Dreieck (Fig. 158) $h_1 = b\sin\gamma$, so ist sein Inhalt

$$J = \frac{ab}{2}\cdot\sin\gamma. \qquad \textbf{XVIII.}$$

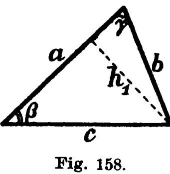


Fig. 158.

Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt zweier Seiten mal dem Sinus ihres Zwischenwinkels.

Ist J aus a, b, α zu berechnen, so berechnet man zunächst β (nach § 44, 5), dann J nach voranstehender Formel.

2. Sind die Winkel β und γ und eine Seite a gegeben, so ist

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)},$$

somit:

$$J = \frac{a^2\cdot\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}.$$

3. Der Fall, daß alle drei Seiten gegeben, wurde schon § 27, 3 (S. 95), behandelt. Übrigens folgt auch aus § 43, 6 Anm. (S. 147):

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s_2 s_3}{bc}}, \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s s_1}{bc}}, \qquad \text{so daß}$$

$$\sin\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{s s_1 s_2 s_3}, \qquad \text{also:} \qquad J = \frac{bc}{2}\sin\alpha = \sqrt{s s_1 s_2 s_3}.$$

4. a) Sind im $\triangle ABC$ *eine Seite und zwei Winkel gegeben*, etwa a, β, γ, so ergibt sich für den Halbmesser ϱ des einbeschriebenen Kreises (Fig. 159):

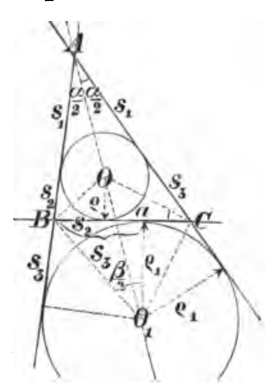


Fig. 159.

$$\varrho = BO \cdot \sin\frac{\beta}{2},$$

während im $\triangle BOC$ nach dem Sinussatz

$$BO = \frac{a\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}, \quad \text{somit wird} \quad \varrho = \frac{a\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Ebenso wird der Halbmesser ϱ_1 des an a anbeschriebenen Kreises:

$$\varrho_1 = BO_1\cos\frac{\beta}{2} = \frac{a\sin\left(90^0 - \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}\cdot\cos\frac{\beta}{2}, \qquad \varrho_1 = \frac{a\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

b) Sind *zwei Seiten und ihr Zwischenwinkel*, etwa b, c, α *gegeben*, so ergibt sich $\qquad \varrho = s_1 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \qquad$ oder

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(b + c - \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}\right).$$

Für $\alpha = 90^0$ ist hiernach $\qquad \varrho = \frac{1}{2}(b + c - a)$.

c) Wenn alle *drei Seiten gegeben* sind, so ist nach § 27, 6 (S. 97):

$$\varrho = \frac{J}{s} = \sqrt{\frac{s_1 s_2 s_3}{s}}.$$

5. Es sei d der Durchmesser des Umkreises eines Dreiecks. Dann liegt der Umfangswinkel α der Sehne a gegenüber; somit ist (§ 34, 5):

$$a = d\sin\alpha \qquad \text{oder}$$

$$d = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

Hieraus folgt weiter für den Fall, daß zwei Seiten und ihr Zwischenwinkel gegeben sind:

$$d = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}}{\sin\alpha},$$

und falls alle drei Seiten gegeben sind $\left(\text{weil } \sin\alpha = \frac{2J}{bc}\right)$:

$$d = \frac{abc}{2J} = \frac{abc}{2\sqrt{s s_1 s_2 s_3}}.$$

6. Die Berechnung von Strecken (Seiten, Höhen, Seiten-

abschnitten usw.) eines Dreiecks, *wenn der Durchmesser seines Umkreises und die Winkel gegeben sind,* läßt sich meist leicht durchführen. Die so erhaltenen Formeln können benützt werden zu Berechnungen beliebiger Stücke aus andern gegebenen Stücken, indem zuerst der Durchmesser berechnet wird.

Fig. 160.

a) Es ist

$$a = d \cdot \sin\alpha, \qquad b = d \cdot \sin\beta, \qquad c = d \cdot \sin\gamma,$$

$$h_1 = b \cdot \sin\gamma = d \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma,$$

$$J = \frac{a h_1}{2} = \frac{d^2}{2} \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma.$$

Der Abschnitt b_3 unter b auf c ist:

$$b_3 = b \cdot \cos\alpha = d \cdot \sin\beta \cdot \cos\alpha.$$

Nun ist $AHCV$ ein Parallelogramm, also $CH = AV$ und $\sphericalangle BVA = \gamma$; somit ist der obere Höhenabschnitt $h_3' = d \cos\gamma$, und der untere Höhenabschnitt ist:

$$h_3'' = b_3 \operatorname{tg}(90^0 - \beta) = d \cdot \sin\beta \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{cotg}\beta = d \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta.$$

b) Der Halbmesser ϱ des Inkreises ist (4a):

$$\varrho = \frac{d \cdot \sin\alpha \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 2d \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Ebenso
$$\varrho_1 = 2d \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}.$$

Anmerkung. Weiter ist:

$$s = \frac{J}{\varrho} = 2d \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}.$$

Da auch (a) $s = \frac{d}{2}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma),$ so ist:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4 \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2};$$

ebenso folgt, weil (§ 43, 6)

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = \varrho\left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\right)$$ ist:

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \frac{s}{\varrho} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}.$$

Diese Formeln gelten für alle Winkel α, β, γ, deren Summe 180^0 beträgt; sie lassen sich auch mit Hilfe der Formeln in § 38 unmittelbar ableiten.

c) Die Halbierende w_1 zu α (Fig. 159) ergibt sich nach dem Sinussatz:

$$w_1 = c \cdot \sin\beta : \sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right);$$

weil aber einerseits $c = d \sin\gamma$, anderseits

$$\beta + \frac{\alpha}{2} = \beta + 90^0 - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 90^0 + \left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right) \quad \text{ist,}$$

so folgt:

$$w_1 = \frac{d \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}.$$

d) Für die Summe zweier Seiten ergibt sich (S. 147, § 43, 5, XVIa):

$$b + c = a \cos\frac{\beta-\gamma}{2} : \sin\frac{\alpha}{2} = 2d \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta-\gamma}{2}.$$

Ebenso ist:

$$b - c = a \sin\frac{\beta-\gamma}{2} : \cos\frac{\alpha}{2} = 2d \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta-\gamma}{2}.$$

§ 46. Anwendung der Dreiecksrechnung auf Vermessungen. Praktische Geometrie.

A. Berechnung von Entfernungen.

Über die Messungen siehe die Aufgabensammlung XXVI.

1. Wenn im Felde der Abstand zweier Punkte $AB = x$ bestimmt werden soll, ohne daß seine unmittelbare Messung möglich ist, während beide Grenzpunkte zugänglich sind, so werden von einem dritten Punkt C die Strecken $AC = b$ und $BC = a$, sowie $\sphericalangle ACB = \gamma$ gemessen; dann ergibt sich AB nach § 44, 3 (S. 148).

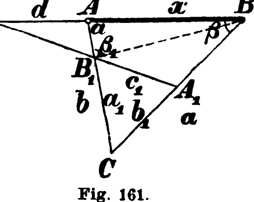


Fig. 161.

Zusatz. Werden noch auf CA und CB die Strecken $CB_1 = a_1$ und $CA = b_1$, und wird auch $A_1B_1 = c_1$ gemessen, so ist im Dreieck A_1B_1C:

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{ss_1}{a_1 b_1}}, \qquad \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s_2 s_3}{a_1 b_1}};$$

hierbei sind s, s_1, s_2, s_3 aus den Seiten a_1, b_1, c_1 zu bestimmen.

Man erhält dann (gemäß § 44, 3c, S. 150) die Gleichung

$$x^2 = \frac{(a-b)^2 ss_1 + (a+b)^2 s_2 s_3}{a_1 b_1}$$

und so die gesuchte Entfernung ohne Winkelmessung.

2. Ist nur ein Grenzpunkt A zugänglich und kann man

a) von A nach B und C sehen, und auch von C nach B, so wird $AC = b$ und $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ACB = \gamma$ gemessen; dann wird AB bestimmt nach dem Sinussatz (§ 44, 2).

Zusatz. Der Satz von Menelaos (S. 40, § 14, 1b) bietet ein Mittel, diese Aufgabe ohne Winkelmessung zu lösen: Man stellt in C_1 einen Signalstab in Richtung von BA und A_1B_1 auf und mißt $AC_1 = d$, $CB_1 = a_1$, $CA = b$, $C_1A_1 = c$ und $B_1A_1 = c_1$; dann ist in dem Dreieck AB_1C_1 mit der Schnittlinie CA_1B:

$$\frac{x}{d+x}\cdot\frac{c}{c_1}\cdot\frac{a_1}{b}=1,\qquad \frac{x}{d+x}=\frac{b c_1}{a_1 c},\qquad \frac{x}{d}=\frac{b c_1}{a_1 c-b c_1},\qquad x=\frac{b c_1 d}{a_1 c-b c_1}.$$

b) Kann man B zwar nicht von A aus sehen, wohl aber von B_1 und von C aus, so wird eine Standlinie $B_1 C = a_1$ gemessen, dazu $AC = b$ und $\sphericalangle ACB = \gamma$, $\sphericalangle AB_1B = \beta_1$. Dann ist

$$BC=\frac{a_1 \sin\beta_1}{\sin(\beta_1-\gamma)}=a \qquad \text{und} \qquad x^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

3. Sind beide Grenzpunkte A und B unzugänglich, so wird eine Standlinie CD so gewählt, daß man von deren Grenzpunkten aus nach A und B sehen kann; dann wird $CD = a$ gemessen. In den Grenzpunkten der Standlinien werden die Winkel der letzteren mit den nach A und B gerichteten Sehlinien gemessen, nämlich $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$. Nun kann man die Seiten AC und BC des Dreiecks ABC berechnen aus den Dreiecken ACD und BCD (nach § 44, 2, S. 148), ebenso AB (nach § 44, 3). So ergibt sich:

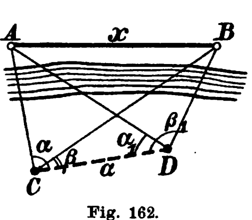


Fig. 162.

$$x^2=\left(\frac{a\sin\alpha_1}{\sin(\alpha+\alpha_1)}\right)^2+\left(\frac{a\sin\beta_1}{\sin(\beta+\beta_1)}\right)^2-2\cdot\frac{a\sin\alpha_1}{\sin(\alpha+\alpha_1)}\cdot\frac{a\cdot\sin\beta_1}{\sin(\beta+\beta_1)}\cdot\cos(\alpha-\beta).$$

Statt $\triangle ABC$ kann auch $\triangle ABD$ in Betracht gezogen werden.

4. Aus der bekannten Entfernung zweier Punkte $AB = c$ (Fig. 162) und aus den Winkeln $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$, welche in zwei weiteren Punkten C und D zwischen den nach den andern Punkten gerichteten Sehstrahlen gemessen wurden, soll die Lage dieser Punkte C und D gegen AB bestimmt werden (Hansen'sche Aufgabe).

Die in 3 aufgestellte Gleichung zwischen x und a gibt aus dem bekannten Werte $x = c$ den fraglichen Wert $CD = a$; dann können auch AC, AD usw. berechnet werden.

5. Aus der bekannten gegenseitigen Lage dreier Punkte ABC,

$$BC=a,\qquad AC=b,\qquad \sphericalangle ACB=\gamma,$$

und aus den in einem vierten Punkt D gemessenen Winkeln der Sehlinien nach jenen drei Punkten $\sphericalangle ADC = \beta$, $BDC = \alpha$, soll die Entfernung des Punktes D von A, B, C bestimmt werden (Snellius 1614, meist die Pothenotsche Aufgabe genannt 1692). — Ist

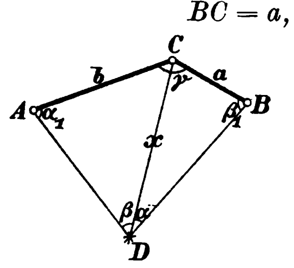


Fig. 163.

$$DC=x,\qquad \sphericalangle CAD=\alpha_1,\qquad \sphericalangle CBD=\beta_1,$$

so ist

$$\alpha+\beta+\alpha_1+\beta_1+\gamma=360^0,\qquad \beta_1=360^0-(\alpha+\beta+\gamma)-\alpha_1;$$

oder, wenn $360^0-(\alpha+\beta+\gamma)=\delta$ gesetzt wird, ist $\beta_1=\delta-\alpha_1$.

Nun ist nach dem Sinussatz sowohl

$$x = \frac{b \sin \alpha_1}{\sin \beta}, \qquad \text{als auch} \qquad x = \frac{a \sin \beta_1}{\sin \alpha} = \frac{a \sin (\delta - \alpha_1)}{\sin \alpha},$$

also: $\dfrac{\sin (\delta - \alpha_1)}{\sin \alpha_1} = \dfrac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}$ oder: $\dfrac{\sin \delta \cos \alpha_1 - \cos \delta \sin \alpha_1}{\sin \alpha_1} = \dfrac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}$,

hieraus: $$\sin \delta \operatorname{cotg} \alpha_1 - \cos \delta = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta},$$

also endlich: $$\operatorname{cotg} \alpha_1 = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta \sin \delta} + \operatorname{cotg} \delta.$$

Der hieraus gefundene Wert von α_1 wird dann in einen der Werte für x eingesetzt.

Zusatz. Bestimmt man einen Hilfswinkel φ so, daß

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta \sin \delta}, \qquad \text{so ist:} \qquad \operatorname{cotg} \alpha_1 = \operatorname{cotg} \varphi + \operatorname{cotg} \delta$$

oder (S. 137, § 38,2):

$$\operatorname{cotg} \alpha_1 = \frac{\sin (\varphi + \delta)}{\sin \varphi \sin \delta}.$$

Hieraus findet man α_1, dann damit x.

Beispiel:

$a =$	41
$b =$	52
$\alpha =$	$43^0 36'$
$\beta =$	$59^0 58'$
$\gamma =$	$139^0 15'$
Summe $=$	$242^0 49'$
$\delta =$	$117^0 11'$
	$(62^0 49'$ II$)$
$\varphi =$	$41^0 22'$
$\varphi + \delta =$	$158^0 33'$
$=$	$21^0 27'$ (II)

$\lg b$	$1{,}7160$
$\lg \sin \alpha$	$\bar{1}{,}8386$
	$1{,}5546$
$\lg a$	$1{,}6128$
$\lg \sin \beta$	$\bar{1}{,}9374$
$\lg \sin \delta$	$\bar{1}{,}9492$
$\lg \operatorname{cotg} \varphi$	$0{,}0552$

$\lg \sin (\varphi + \delta)$	$\bar{1}{,}5631$
$\lg \sin \varphi$	$\bar{1}{,}8201$
$\lg \sin \delta$	$\bar{1}{,}9492$
$\lg \operatorname{cotg} \alpha_1$	$\bar{1}{,}7938$
$\alpha_1 =$	$58^0 7'$
$\lg \sin \alpha_1$	$\bar{1}{,}9290$
$\lg b$	$1{,}7160$
$- \lg \sin \beta$	$0{,}0626$
$\lg x$	$1{,}7076$
$x =$	$51.$

Hieraus dann weiter $AD = 53$, $BD = 58$.

Zusatz. Durch Zeichnung wird die Aufgabe gelöst mit Hilfe von Kreisbogen um a und b als Sehnen und mit α und β als ihren Umfangswinkeln (I. Teil, § 34,6). Die Aufgabe wird unbestimmt, wenn

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0;$$

denn dann fallen beide Kreise in einen zusammen, und es wird

$$\delta = 180^0, \qquad \operatorname{cotg} \delta = \pm \infty.$$

6. In ähnlicher Weise kann folgende Aufgabe gelöst werden.

In zwei auf demselben Meridian liegenden Orten A (Stockholm) und B (Kapstadt), deren Meridianbogen sich aus der Summe ihrer geographischen Breiten ($\varphi = 59^0 20{,}5'$ und $\varphi_1 = 33^0 54{,}9'$) ergibt: $\gamma = 93^0 15{,}4'$, wurde gleichzeitig der Winkel der Lotlinie mit der Richtung nach dem Monde D gemessen,

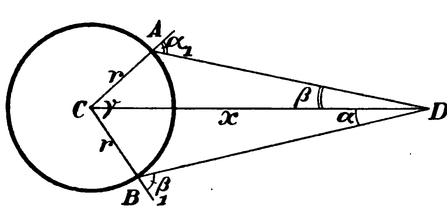


Fig. 164.

$$\alpha_1 = 61^0 13{,}5',$$
$$\beta_1 = 33^0 20{,}4'.$$

Man soll berechnen, um wieviele Erdhalbmesser der Mond vom Erdmittelpunkt entfernt war.

Es ist $$\alpha + \beta = \alpha_1 + \beta_1 - \gamma = 1^0 18{,}5' = \delta.$$

$$\frac{x}{r} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \alpha}, \qquad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \alpha_1}.$$

Indem man $\beta = \delta - x$ einsetzt, ergibt sich α und x wie in 5. — Eine zweite Lösung wäre, AB als Sehne zu γ, AD aus $\triangle ABD$ nach dem Sinussatz und schließlich CD aus $\triangle ACD$ nach dem Cosinussatz zu berechnen.

Da lg sin $1^0 18{,}5'$ mit lg arc $1^0 18{,}5'$ noch auf 4 Dezimalen übereinstimmt (S. 138, § 39, 3), so kann man bei Anwendung 4- oder 5-stelliger Logarithmen $\sin \alpha = \operatorname{arc} \alpha$, $\sin \beta = \operatorname{arc} \beta$ setzen, also

$$\frac{\operatorname{arc} \alpha}{\operatorname{arc} \beta} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \alpha_1}, \qquad \frac{\operatorname{arc} \alpha}{\operatorname{arc}(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \alpha_1 + \sin \beta_1} = \frac{\sin \beta_1}{2 \sin \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} \cos \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}}.$$

Man setzt nun hieraus den Wert von arc α für $\sin \alpha$ oben ein und erhält:

$$x = r \cdot \frac{2 \sin \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} \cos \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}}{\sin(\alpha + \beta)},$$

wobei

$$\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} = 47^0 17', \qquad \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} = 13^0 57'.$$

lg 2	0,3010
$\lg \sin \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}$	$\bar{1}$,8661
$\lg \cos \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}$	$\bar{1}$,9870
$- \lg \sin(\alpha + \beta)$	1,6414
$\lg \frac{x}{r}$	1,7955

$$x = 62{,}4 \,.\, r.$$

7. In einem Punkt S seien die Winkel der Strahlen nach vier Punkten $ABCD$ einer Geraden gemessen:

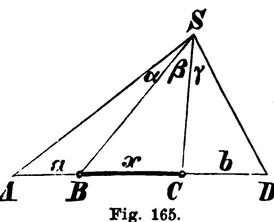


Fig. 165.

$$\sphericalangle ASB = \alpha, \quad \sphericalangle BSC = \beta, \quad \sphericalangle CSD = \gamma$$

und außerdem die beiden Strecken

$$AB = a, \qquad CD = b;$$

man soll BC berechnen.

Ist h die Senkrechte von S auf AD,

so ist:

$$2 \cdot \triangle SAD = (a + x + b)h = SA \cdot SD \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma),$$

während

$$SA = \frac{a \sin B}{\sin \alpha}, \qquad SD = \frac{b \sin C}{\sin \gamma}, \qquad h = SB \sin B = \frac{x \sin C}{\sin \beta} \cdot \sin B.$$

Hieraus folgt die Gleichung $\quad (a + b + x)x = \dfrac{ab \sin \beta \sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\sin \alpha \sin \gamma},$

und aus dieser ist x zu berechnen.

B. Berechnung von Höhen.

8. Die Höhe eines Punktes S über einem Punkt A ist zu bestimmen, wenn von A aus eine Standlinie $AB = a$ nach der Lotlinie des Punktes S gerichtet ist.

a) Läuft die Standlinie $AB = a$ wagrecht, so sind an beiden Grenzpunkten die Höhenwinkel α und β zu messen. Es ist dann

$$SB = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)} \qquad \text{und} \qquad x = SB \cdot \sin \beta,$$

Fig. 166.

also

$$x = \frac{a \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

b) Läuft die Standlinie AB nicht wagrecht, so wird außer den Höhenwinkeln α und β auch der Neigungswinkel γ der Standlinie bestimmt. Es ist dann

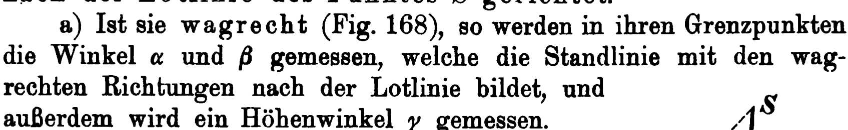
$$SA = \frac{a \sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta - \alpha)}, \qquad \text{also:}$$

$$x = SA \sin \alpha = \frac{a \sin \alpha \sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

Fig. 167.



9. Die Standlinie AB sei nicht nach der Lotlinie des Punktes S gerichtet.



a) Ist sie wagrecht (Fig. 168), so werden in ihren Grenzpunkten die Winkel α und β gemessen, welche die Standlinie mit den wagrechten Richtungen nach der Lotlinie bildet, und außerdem wird ein Höhenwinkel γ gemessen.

Dann ist

$$AF = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \qquad \sphericalangle AFS = R,$$

Fig. 168.

folglich

$$x = AF \cdot \operatorname{tg} \gamma = \frac{a \sin \beta \operatorname{tg} \gamma}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Statt dessen können auch (Fig. 169) zwei Strecken

$$AB = a, \qquad BC = b$$

einer wagrechten Standlinie gemessen werden und dazu die Höhenwinkel α, β, γ in deren Grenzpunkten. Dann ist

$$F = x \operatorname{cotg} \alpha, \qquad BF = x \operatorname{cotg} \beta, \qquad CF = x \operatorname{cotg} \gamma.$$

Nach § 27, 4 (S. 96) folgt:

$$x^2 \operatorname{cotg}^2 \alpha \cdot b + x^2 \operatorname{cotg}^2 \gamma \cdot a = x^2 \operatorname{cotg}^2 \beta (a + b) + ab(a + b),$$

$$x^2 = \frac{ab(a+b)}{a \operatorname{cotg}^2 \gamma + b \operatorname{cotg}^2 \alpha - (a+b) \operatorname{cotg}^2 \beta}.$$

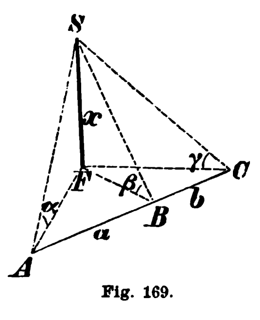


Fig. 169.

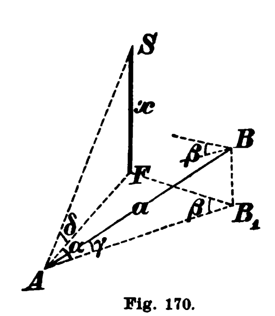


Fig. 170.

b) Ist die Standlinie AB nicht wagrecht (Fig. 170), so mißt man ihren Neigungswinkel γ und außerdem die wagrechten Winkel

$$FAB_1 = \alpha, \quad FB_1A = \beta,$$

sowie den Höhenwinkel $FAS = \delta$.

Dann ist $\qquad AB_1 = a \cos \gamma, \quad AF = \frac{AB_1 \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)},$

folglich

$$x = AF \cdot \operatorname{tg} \delta \qquad \text{oder:} \qquad x = \frac{a \sin \beta \cos \gamma \operatorname{tg} \delta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

C. Flächenteilung.

10. Ein Dreieck ABC soll parallel zu einer gegebenen Richtung im Verhältnis $p : q$ geteilt werden; diese Richtung mache mit AB den Winkel δ. — Aus § 26, 4 (S. 93) folgt:

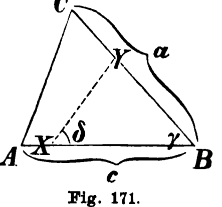


Fig. 171.

$$\frac{\overline{BX} \cdot \overline{BY}}{a \cdot c} = \frac{p}{p+q}; \quad \text{ferner ist:}$$

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{BY}} = \frac{\sin(\gamma + \delta)}{\sin \delta}, \quad \text{somit:}$$

$$\overline{BX}^2 = \frac{p}{p+q} ac \cdot \frac{\sin(\gamma + \delta)}{\sin \delta}.$$

11. Ein Viereck $ABCD$ (Fig. 172) ist im Verhältnis $p : q$ zu

teilen parallel zu einer Richtung, welche mit AD den Winkel ε bildet. — Wenn AD und BC einander in S schneiden, so ist

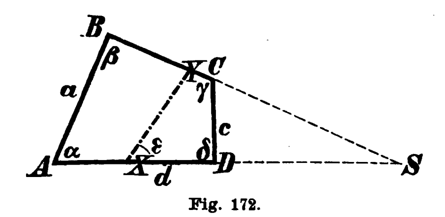


Fig. 172.

$$\triangle SXY = \tfrac{1}{2}\overline{SX}\cdot\overline{SY}\sin(\alpha+\beta) = \frac{q}{p+q}\cdot J + CDS = \frac{qJ+(p+q)CDS}{p+q}$$

$$= \frac{q(J+CDS)+p\cdot CDS}{p+q} = \frac{qa^2\cdot\sin\alpha\sin\beta + pc^2\cdot\sin\gamma\sin\delta}{2(p+q)\sin\alpha\,(+\beta)};$$

da aber
$$\overline{SY} = \frac{\overline{SX}\sin\varepsilon}{\sin(\alpha+\beta-\varepsilon)},$$

so folgt beim Einsetzen in die vorige Gleichung:

$$\overline{SX}^2 = \frac{\sin(\alpha+\beta-\varepsilon)}{(p+q)\sin\varepsilon\sin^2(\alpha+\beta)}\,(qa^2\sin\alpha\sin\beta + pc^2\sin\gamma\sin\delta).$$

Beachtet man noch, daß

$$\overline{DX} = \overline{SX} - \frac{c\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)},$$

so wird aus SX auch leicht DX gefunden.

12. Ein Viereck $ABCD$ ist von dem in einer Seite gelegenen Punkt Y aus in einem gegebenen Verhältnis $p:q$ zu teilen. — Ist $YC = m$ und setzt man

$$\overline{SY} = m + \frac{c\sin\delta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{m\sin(\alpha+\beta)+c\sin\delta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

in die Formel in 11 ein, so folgt:

$$\overline{SX} = \frac{qa^2\sin\alpha\sin\beta + pc^2\sin\gamma\sin\delta}{(p+q)\sin(\alpha+\beta)\,[m\sin(\alpha+\beta)+c\sin\delta]};$$

da aber:
$$\overline{DX} = \overline{SX} - \frac{c\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)},$$

so ist DX und hiermit die Lage des Punktes X auf AD berechnet.

XI. Kapitel.

Die Winkelfunktionen in der Koordinatengeometrie und Arithmetik.

§ 47. Rechtwinkelige und Polarkoordinaten.

1. Zur Bestimmung der Lage eines Punktes P einer Ebene wählt man in der Ebene eine Gerade XX_1 als Abszissenachse und auf dieser einen Punkt O, den Nullpunkt; dann gibt man an, wie groß für jeden Punkt P die zur Achse Senkrechte oder Ordinate $PA = y$ ist, und wie groß der vom Nullpunkt bis zur Senkrechten reichende Abschnitt oder die Abszisse $OA = x$ ist. Dieser Abschnitt ist zugleich der Abstand des Punktes P von der Ordinatenachse YY_1, die im Nullpunkt senkrecht zur Abszissenachse gezogen wird; XX_1 und YY_1 heißen die Koordinatenachsen, und x und y die Achsenabstände oder Koordinaten des Punktes P.

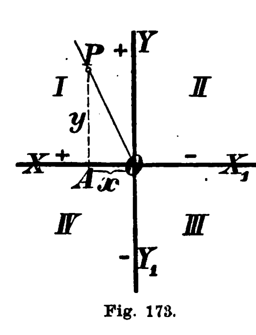


Fig. 173.

Die beiden Achsen teilen die Ebene in vier Felder, Viertel (Quadranten), die wir in der dem Lauf des Uhrzeigers entsprechenden Reihenfolge abzählen, da in demselben Drehungssinn auch die Kreise der Winkelmeßinstrumente geteilt sind. Um die Messungen vom Nullpunkt ab auf der Achse nach entgegengesetzten Richtungen zu unterscheiden, werden die Abschnitte nach der Seite des ersten Viertels positiv, die entgegengesetzten negativ bezeichnet; ebenso gelten die Senkrechten auf derjenigen Seite der ersten Achse, auf der das erste Viertel liegt, als positiv, die auf der entgegengesetzten Seite als negativ. Hiernach ist:

Viertel	I	II	III	IV
Abszisse	+	—	—	+
Ordinate	+	+	—	—

Anmerkung. Auf diese Bestimmung der Lage der Punkte wurde von Descartes (gest. 1650) die sog. analytische Geometrie oder Koordinaten-Geometrie gegründet.

2. Die Lage eines Punktes P_1 (Fig. 174) läßt sich auch bestimmen durch die Strahlstrecke $OP_1 = r_1$ vom Nullpunkt ab und durch den Winkel α, um den eine Gerade vom positiven Achsenstrahl OA_1 aus über das erste Viertel gedreht werden muß, um in die Lage OP_1 zu kommen. Die Strahlstrecke und der Winkel heißen die Polarkoordinaten des Punktes P_1.

Bei solcher Punktbestimmung ergibt sich, daß für jeden Punkt im ersten, zweiten, dritten oder vierten Viertel der Winkel seiner Strahlstrecke mit der Achse OA_1 entsprechend zwischen 0^0 und 90^0, 90^0 und 180^0, 180^0 und 270^0, 270^0 und 360^0 liegt; hiernach bezeichnet man Winkel von dieser Größe als Winkel des ersten, zweiten, dritten oder vierten Viertels.

§ 48. Die Funktionen von Winkeln jeder Größe.

1. Zwei Halbstrahlen eines Punktes bilden immer zwei Winkel, die einander zu vier Rechten ergänzen. Welcher von diesen beiden Winkeln zu nehmen ist, wird dadurch bestimmt, daß a) einer der beiden Schenkel als der erste bezeichnet wird, von dem die Drehung ausgeht, die den Winkel beschreibt, und daß b) ein bestimmter Drehungssinn (als positiv) angenommen wird, in dem der (positive) Winkel beschrieben wird.

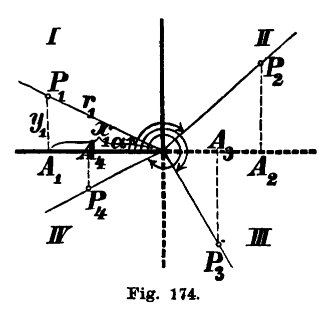


Fig. 174.

Zur Bestimmung der Winkelfunktionen denkt man sich nun die Koordinatenachsen so in den Winkel gelegt, daß sein Scheitel der Nullpunkt, sein erster Schenkel die positive X-Achse ist, und daß auf der Seite des ersten Viertels der positiven Drehung die positive Y-Achse liegt (Fig. 174). Dann sind die Winkelfunktionen bestimmt durch die (stets positive) Strahlstrecke r irgend eines Punktes des zweiten Schenkels, durch dessen Senkreckte y auf den ersten Schenkel und durch den Abschnitt x dieses Schenkels:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{x}{y},$$

wobei x und y je nach ihrer Lage in den vier Vierteln der Drehung positiv oder negativ sind. *Der Abschnitt x* (Cosinus) *ist positiv, wenn er in die Richtung des ersten Schenkels fällt, negativ in der Gegenrichtung*; *die Senkrechte y* (Sinus) *ist positiv, wenn sie auf die Seite des ersten Viertels der Drehung fällt, negativ auf der Gegenseite,* wie die Figur 174 erkennen läßt. Die Vorzeichen von tg und cotg richten sich nach dem des Quotienten beider Strecken.

Außer der ersten Viertelsdrehung ist noch positiv im II. Viertel Sinus, im III. Tangens und Cotangens, im IV. Cosinus; sonst sind die Funktionen negativ.

2. Der spitze Winkel der beiden Geraden, von denen zwei Halbstrahlen den gegebenen Winkel bilden, gehört dem rechtwinkeligen Dreieck aus r, x und y an, und seine Funktionen bestimmen,

abgesehen vom Vorzeichen, die des gegebenen Winkels. Für den Winkel (Fig. 175) im

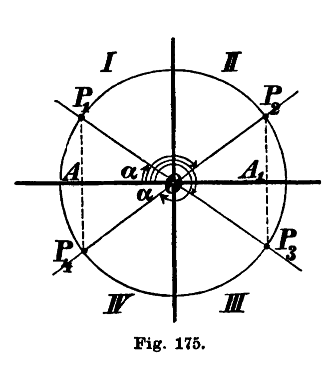


Fig. 175.

II. Viertel $\alpha_2 = AOP_2$ ist dieser Winkel $P_2OA_1 = 180^0 - \alpha_2$,
III. Viertel $\alpha_3 = AOP_3$ ist dieser Winkel $A_1OP_3 = \alpha_3 - 180^0$,
IV. Viertel $\alpha_4 = AOP_4$ ist dieser Winkel $P_4OA = 360^0 - \alpha_4$.

Somit ist:

$$\left.\begin{aligned} 1)\ \sin\alpha_2 &= \sin(180^0 - \alpha_2) \\ \cos\alpha_2 &= -\cos(180^0 - \alpha_2) \\ \operatorname{tg}\alpha_2 &= -\operatorname{tg}(180^0 - \alpha_2) \\ \operatorname{cotg}\alpha_2 &= -\operatorname{cotg}(180^0 - \alpha_2) \end{aligned}\right\} \text{(XII)}$$

Ferner siehe S. 144 (§ 42, 4) die einschlägige Formel XIIa.

$$\left.\begin{aligned} 2)\ \sin\alpha_3 &= -\sin(\alpha_3 - 180^0) \\ \cos\alpha_3 &= -\cos(\alpha_3 - 180^0) \\ \operatorname{tg}\alpha_3 &= \operatorname{tg}(\alpha_3 - 180^0) \\ \operatorname{cotg}\alpha_3 &= \operatorname{cotg}(\alpha_3 - 180^0) \end{aligned}\right| \begin{aligned} 3)\ \sin\alpha_4 &= -\sin(360^0 - \alpha_4) \\ \cos\alpha_4 &= \cos(360^0 - \alpha_4) \\ \operatorname{tg}\alpha_4 &= -\operatorname{tg}(360^0 - \alpha_4) \\ \operatorname{cotg}\alpha_4 &= -\operatorname{cotg}(360^0 - \alpha_4) \end{aligned}\left.\vphantom{\begin{aligned}a\\a\\a\\a\end{aligned}}\right\} \text{(XIIb)}$$

d. h.:

Vorbehaltlich der Bestimmung des Vorzeichens sind die Funktionen eines Winkels im zweiten Viertel dieselben wie die seines Ergänzungswinkels zu 180⁰, *die eines Winkels im dritten Viertel dieselben wie die seines Überschußwinkels über* 180⁰, *die eines Winkels im vierten Viertel dieselben wie die seines Ergänzungswinkels zu* 360⁰.

Z. B. $\sin 209^0\,44' = -\sin 29^0\,44'$

$\operatorname{cotg} 312^0\,17' = -\operatorname{cotg}(359^0\,60' - 312^0\,17') = -\operatorname{cotg} 47^0\,43'$.

Umgekehrt gehören zu jedem Funktionswert zwei Winkel, z. B.:

$\operatorname{cotg}\alpha = -5{,}352$, $\lg\operatorname{cotg}\alpha = 0{,}7285\,(-)$, $\alpha = 10^0\,35'$ (II oder IV),
$\alpha_1 = 180^0 - 10^0\,35' = 169^0\,25'$, $\alpha_2 = 360^0 - 10^0\,35' = 349^0\,25'$.

3. Um bei wachsendem Winkel die Wertänderung seines Sinus und Cosinus leichter beurteilen zu können, wählt man für alle

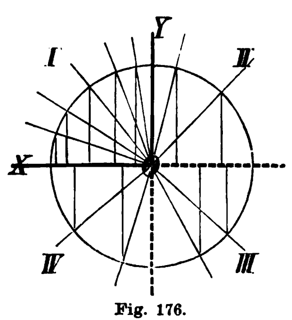


Fig. 176.

Winkel gleiche Strahlstrecken, (so daß die Brüche, welche die Zahlen darstellen, gleichnamig werden). Beschreibt man nämlich um den Nullpunkt O einen Kreis mit der Strahlstrecke r, so geben die Ordinaten und Abszissen der Endpunkte der Halbmesser die Größenverhältnisse der zugehörigen Sinus und Cosinus an. Man erkennt sofort:

a) *Der Sinus wächst im ersten Viertel mit wachsendem Winkel von* $\sin 0^0 = 0$ *bis*

$\sin 90^0 = 1$; im zweiten Viertel nimmt er ab bis $\sin 180^0 = 0$, im dritten nimmt er negativ zu bis $\sin 270^0 = -1$ und im vierten negativ ab bis $\sin 360^0 = 0$.

b) *Der Cosinus nimmt im ersten Viertel mit wachsendem Winkel ab* von $\cos 0^0 = 1$ bis $\cos 90^0 = 0$; er geht im zweiten Viertel von $\cos 90^0 = 0$ bis $\cos 180^0 = -1$, nähert sich dann im dritten wieder der Null bis $\cos 270^0 = 0$ und wächst im vierten wieder bis $\cos 360^0 = +1$.

4. Zur Beurteilung der Wertänderung von Tangens wählt man für alle Winkel gleiche Abszissen $OA = OA_1$ (den gleichen Nenner für die Bruchwerte), indem man die Strahlstrecken durch die Ordinaten in A und A_1 begrenzt. Verlängert man die Schenkel des zweiten und dritten Viertels bis zur Senkrechten in A, so geben die auf dieser Geraden gemessenen Ordinaten sowohl über die Größe als über das Zeichen der betreffenden Tangens Aufschluß. Man erkennt sofort:

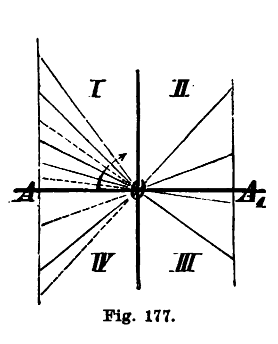


Fig. 177.

Die Tangens wächst im ersten Viertel mit wachsendem Winkel von $\operatorname{tg} 0^0 = 0$ *bis* $\operatorname{tg} 90^0 = \infty$. Beim Übergang des Winkels durch 90^0 springt die Tangens von $+\infty$ auf $-\infty$, um im zweiten Viertel von $\operatorname{tg} 90^0 = -\infty$ bis $\operatorname{tg} 180^0 = 0$ zu fallen; sie wächst dann im dritten Viertel von $\operatorname{tg} 180^0 = 0$ bis $\operatorname{tg} 270^0 = +\infty$, schlägt hier in $-\infty$ um und sinkt im vierten bis $\operatorname{tg} 360^0 = 0$.

Um die Wertänderung der Cotangens darzustellen, ist eine unveränderliche Ordinate OB zu wählen und in B die Parallele zur Achse zu ziehen. Die durch den zweiten Schenkel oder dessen Gegenstrahl auf dieser Parallelen begrenzten Abschnitte versinnlichen dann Größe und Zeichen von Cotangens.

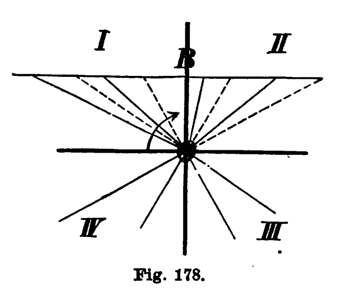


Fig. 178.

Die Cotangens nimmt im ersten Viertel mit wachsendem Winkel ab von $\operatorname{cotg} 0^0 = \infty$ *bis* $\operatorname{cotg} 90^0 = 0$. Sie nimmt im zweiten Viertel im negativen Sinne zu bis $\operatorname{cotg} 180^0 = -\infty$, springt hier auf $+\infty$ über, nimmt im dritten Viertel ab bis $\operatorname{cotg} 270^0 = 0$ und steigt von da im negativen Sinne wieder bis $\operatorname{cotg} 360^0 = -\infty$.

5. Bei der Entstehung des Winkels durch Drehung oder beim Zusammenzählen von Winkeln kann es auch vorkommen, daß 360^0 überschritten werden (vgl. Teil I. § 7, 7 Anmerkung). Dreht man aber den zweiten Schenkel um 360^0 weiter, so kommt er wieder in die Lage, die er

zuvor inne hatte und für welche somit die Abszissen und Ordinaten wieder dieselben sind. Daher ergibt sich:

Von zwei Winkeln, die sich um ein ganzes Vielfaches von 360⁰ unterscheiden, stimmen die entsprechenden Funktionen völlig überein.

6. Eine Drehung vom ersten Schenkel nach der Gegenseite der positiven Drehung wird durch **negative Winkel** gemessen. Für zwei entgegengesetzte Winkel α und $-\alpha$, oder β und $-\beta$ fallen die Abszissen in eine einzige Strecke OA oder OA_1 zusammen, während die Ordinaten entgegengesetzt sind. Daraus folgt:

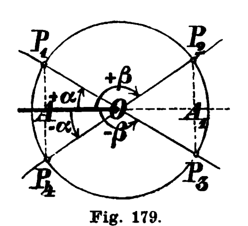


Fig. 179.

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$
$\cos(-\alpha) = \quad\cos\alpha$	$\operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$, d. h.:

Zwei entgegengesetzte Winkel haben nur den gleichen cos; *ihre übrigen entsprechenden Funktionen haben je entgegengesetzte Werte.*

7. Wird ein beliebiger Winkel um 180⁰ geändert, indem man statt des zweiten Schenkels seine Gegenrichtung in Betracht zieht, so nimmt sowohl die Abszisse als die Ordinate das entgegengesetzte Zeichen an; es gilt somit für alle Werte von α:

$$\sin(\alpha \pm 180^0) = -\sin\alpha, \qquad \operatorname{tg}(\alpha \pm 180^0) = \quad \operatorname{tg}\alpha,$$
$$\cos(\alpha \pm 180^0) = -\cos\alpha, \qquad \operatorname{cotg}(\alpha \pm 180^0) = \quad \operatorname{cotg}\alpha,$$ d. h.:

Zwei Winkel, die sich um 180⁰ *unterscheiden, haben je die gleiche* tg *und die gleiche* cotg; *dagegen sind ihre* sin, *sowie ihre* cos *entgegengesetzt.*

§ 49. Allgemeine Gültigkeit der Funktionsformeln.

1. In den Gleichungen $y = r\sin\alpha$, $x = r\cos\alpha$

timmen immer die Zeichen von y und $\sin\alpha$ überein, ebenso die von x und $\cos\alpha$.

Für alle zusammengehörigen, positiven oder negativen Werte von x und y ist nun aber

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

woraus folgt, daß ebenso allgemein gilt:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{II}$$

2. Aus der allgemeinen Gültigkeit der Gleichungen

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{x}{y},$$

folgt:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha = 1, \tag{IX}$$

und in Verbindung mit obigen Gleichungen für y und x

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{X}$$

3. Daß die für spitze Winkel abgeleiteten Formeln für die Funktionen von $(\alpha \pm \beta)$, 2α und $\frac{\alpha}{2}$ (§§ 35 und 36) allgemeine Gültigkeit haben, kann nachgewiesen werden, indem man in jedem einzelnen Fall die Funktionen auf die von spitzen Winkeln zurückführt, wie dies in § 42, 5 (S. 144) geschehen ist. Oder man zeichnet die Figur für den betreffenden Fall und liest an ihr die Funktionen ab mit Rücksicht auf die durch die Lage gegebenen Vorzeichen. Für $(\alpha + \beta)$ wird dann wie in Fig. 149 (S. 129) die Fig. 180 gezeichnet, wobei immer (vgl. I. Teil § 6, 6):

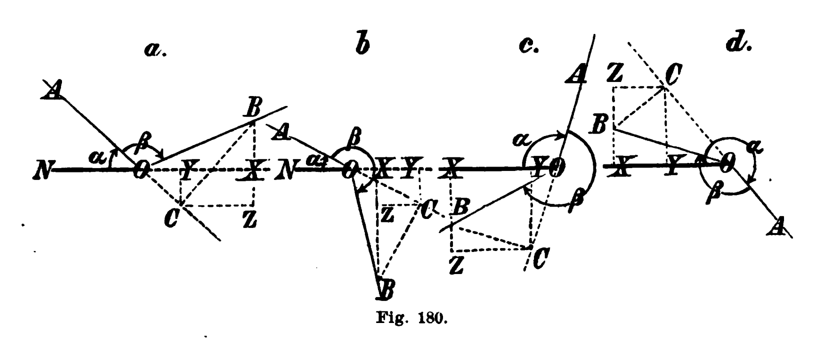


Fig. 180.

$$XB = XZ + ZB. \qquad | \qquad OX = OY + YX.$$

Hierin ist:

$$XB = OB \sin(\alpha + \beta), \qquad | \qquad OX = OB \cos(\alpha + \beta),$$

wobei diese Größe sowohl positiv als negativ sein kann. Zur Berechnung der rechtsseitigen Glieder der Gleichungen bestimmt man zunächst die Fahrstrahlen:

$$OC = \pm OB \cdot \cos\beta, \quad BC = \pm OB \cdot \sin\beta,$$

wobei das Zeichen so zu nehmen ist, daß der Ausdruck positiv ist, da die Fahrstrahlen stets als positive Größen gelten. Der Winkel von OC gegen den ersten Schenkel ist α, falls $\cos\beta$ positiv ist, dagegen $\alpha \pm 180^0$, sobald $\cos\beta$ negativ ist, da dann OC auf den Gegenstrahl des Schenkels OA fällt. Daher ist entweder:

$$XZ = OB \cos\beta \sin\alpha, \quad \text{oder:} \qquad | \qquad OY = OB \cos\beta \cos\alpha, \quad \text{oder:}$$

$$XZ = -OB \cos\beta \sin(\alpha \pm 180^0) \qquad | \qquad OY = -OB \cos\beta \cos(\alpha \pm 180^0)$$

$$= OB \cos\beta \sin\alpha. \qquad | \qquad = OB \cos\beta \cos\alpha.$$

Der Winkel von CB gegen den ersten Schenkel ist $\alpha + 90^0$, sobald $\sin\beta$ positiv ist, dagegen $(\alpha + 270^0)$, sobald $\sin\beta$ negativ. In beiden Fällen ergibt sich wie eben, daß

$$ZB = OB \sin\beta \sin(\alpha + 90^0) \qquad | \qquad YX = OB \sin\beta \cos(\alpha + 90^0)$$

$$= OB \sin\beta \cos\alpha. \qquad | \qquad = -OB \sin\beta \sin\alpha.$$

Somit verwandeln sich die zuerst gegebenen Gleichungen

$$XB = XZ + ZB, \qquad OX = OY + YX$$

in die Gleichungen:

$$OB \sin(\alpha + \beta) = OB \sin\alpha \cos\beta + OB \cos\alpha \sin\beta, \quad \Big| \quad OB \cos(\alpha + \beta) = OB \cos\alpha \cos\beta - OB \sin\alpha \sin\beta,$$

womit die allgemeine Gültigkeit der Formeln für $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$ erwiesen ist.

Die Formeln für $\sin(\alpha - \beta)$ und $\cos(\alpha - \beta)$ ergeben sich aus diesen, wenn man $-\beta$ statt β setzt; es ist dann nämlich (§ 48, 6, S. 166):

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta.$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos(-\beta) - \sin\alpha \sin(-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta.$$

4. Setzt man $\beta = \alpha$ in den Formeln für $(\alpha + \beta)$ ein, so erhält man die Formeln für die Funktionen von 2α und $\frac{\alpha}{2}$ (§ 35, III, IV, V), und ebenso ergibt sich die Gültigkeit aller übrigen Formeln der Winkelfunktionen (§ 37 u. 38), da sie aus den vorangehenden abgeleitet sind.

§ 50. Bestimmungsgleichungen für Winkelfunktionen.

1. Ist die Größe eines Winkels durch eine Gleichung zwischen seinen Funktionen bestimmt, so sind letztere zunächst mittels der Formeln II, IX und X (§ 49, 1 u. 2) durch eine einzige Funktion zu ersetzen (S. 135, § 37, 9), die übrigens auch zu dem halben oder doppelten fraglichen Winkel gehören mag (S. 135, § 37, 12); dann ist diese Gleichung nach den üblichen Regeln aufzulösen. Jedem Funktionswert entsprechen zwei Winkel innerhalb 0^0 und 360^0.

Beispiele:

2. $a \sin x = b \cos x$. — Entweder erhebt man zum zweiten Grad:

$$a^2 \sin^2 x = b^2 \cos^2 x$$

und ersetzt $\cos^2 x$ durch $(1 - \sin^2 x)$, oder wenn man annehmen darf, daß nicht $\cos x = 0$ ist, teilt man durch $a \cos x$ und erhält

$$\operatorname{tg} x = \frac{b}{a}.$$

Im ersten Fall ist darauf zu achten, daß durch das Quadrieren stets noch weitere Werte der Unbekannten in die Gleichung mit aufgenommen werden, die in der ursprünglichen nicht enthalten sind. Z. B. würde die Gleichung $a^2 \sin^2 x = b^2 \cos^2 x$ auch der Gleichung $a \sin x = -b \cos x$ entsprechen. Daher sind die gefundenen Werte darauf zu prüfen, ob sie der ursprünglichen Gleichung genügen.

3. $\quad a \operatorname{tg} x + b \sin x = 0 \quad$ oder $\quad \sin x \cdot \left(\frac{a}{\cos x} + b\right) = 0.$

Diese Gleichung ist erfüllt

für $\sin x = 0$, woraus $x_1 = 0$, $x_2 = 180^0$,

und für $\frac{a}{\cos x} + b = 0$, woraus $\cos x = -\frac{a}{b}$ folgt.

Wäre z. B. $b = 2a$, so wäre $x_3 = 120^0$, $x_4 = 240^0$.

4. $a \sin x + b \cos x = c$. Statt $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ zu setzen, wird besser folgendes Verfahren eingeschlagen:

$$\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}.$$

Man bestimme den Hilfswinkel φ so, daß $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ ist; dann wird

$$\sin x + \operatorname{tg} \varphi \cos x = \frac{c}{a}$$

oder $\sin x \cos \varphi + \sin \varphi \cos x = \frac{c \cos \varphi}{a}$, $\sin (x + \varphi) = \frac{c \cos \varphi}{a}$.

Sind für a, b, c Zahlen gegeben, so wird zunächst φ, dann $(x + \varphi)$ und schließlich x gefunden.

5. Ist im besonderen Fall

$$a = b, \quad \text{also:} \quad \sin x + \cos x = p,$$

so wird diese Gleichung auch gelöst durch Quadrieren und Anwendung der Formeln II und III (S. 127 § 35, 1,):

$$\sin 2x = (p + 1)(p - 1)$$

oder auch (S. 137, § 38, 3) $\sin (x + 45^0) = \frac{p}{\sqrt{2}}$.

6. Da sich alle Funktionen von x rational durch $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ausdrücken lassen (S. 135, § 37, 12), so kann $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ öfters benützt werden, um Gleichungen für Winkelfunktionen aufzulösen. Für obige Gleichung (in 4) ergibt sich so z. B.:

$$2a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + b - b \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = c + c \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (b + c) \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 2a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = b$$

usw.

§ 51. Berechnung des Geradenzugs und des Vielecks. (Polygonometrie.)

1. Die Lage einer Geraden kann bestimmt werden durch die Abszisse und Ordinate zweier Punkte derselben oder durch die eines Punktes und durch den Winkel der Geraden mit der Achse (§ 47). Um die Richtung der Geraden für die Winkelmessung genau festzustellen, denkt man sich jede Gerade oder jeden Geradenzug durch Bewegung entstanden; die Richtung dieser Bewegung wird durch Ordnungszahlen an den Ecken

des Geradenzuges bezeichnet. Die Koordinaten dieser Punkte bezeichnet man mit x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; ... x_n, y_n.

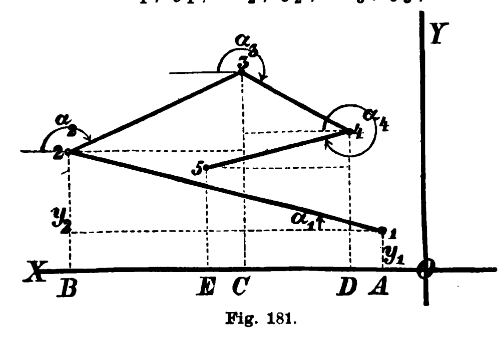


Fig. 181.

Der Neigungswinkel (das Azimut) einer Geraden gegen die X-Achse wird dadurch bestimmt, daß man durch den Anfangspunkt der Geraden die Parallele zur positiven Achse zieht und von dieser ab als dem ersten Schenkel den Winkel in dem bereits § 47, 2 (S. 162) angegebenen Drehungssinne mißt.

Wenn in einem Geradenzug die Geraden $\overline{12} = a_1$, $\overline{23} = a_2$, $\overline{34} = a_3$ .... mit der Achse die Winkel w_1, w_2, w_3 .... bilden, und wenn wir unter $\sphericalangle\, a_1\, a_2$ den Winkel verstehen, den die Verlängerung von $\overline{12}$ mit $\overline{23}$ bildet, so ist (I. Teil, §14, 4 Anm. b.): $\sphericalangle\, w_2 = w_1 + a_1\, a_2$. Wird der Winkel der Richtungen $\overline{21}$ und $\overline{23}$ mit α_2 bezeichnet, so ist:

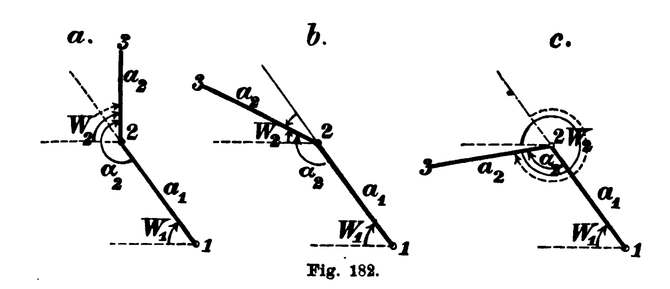


Fig. 182.

$\sphericalangle\, a_1\, a_2 = \alpha_2 \pm 180^0$, da in letzterem Winkel statt $\overline{12}$ die Gegenrichtung $\overline{21}$ als erster Schenkel betrachtet wird. Daher ist

$$\begin{aligned} w_2 &= w_1 + \alpha_2 \pm 180^0, \\ w_3 &= w_2 + \alpha_3 \pm 180^0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ w_n &= w_{n-1} + \alpha_n \pm 180^0, \end{aligned}$$

2. Die zwischen den Fußpunkten AB (Fig. 181) der Koordinaten einer Strecke 12 liegende Strecke der Achse nennt man den Achsenabschnitt (den Grundriß oder die Projektion) zu der Strecke; man betrachtet sie als positiv, wenn die Bewegung von A nach B in der Richtung der positiven Achse statthat, negativ im entgegengesetzten Fall. Das Vorzeichen des Abschnittes zu einer Strecke auf der X-Achse richtet sich also nach dem Cosinus, auf der Y-Achse nach dem Sinus des Neigungswinkels. Zugleich ist der Abschnitt zu einer Strecke auf einer Achse

stets gleich dem Unterschied der auf dieser Achse gemessenen Koordinaten der Grenzpunkte.

Für den Unterschied der Abszissen und der Ordinaten zweier aufeinander folgenden Punkte des Geradenzugs erhält man somit die folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} x_2 - x_1 = a_1 \cos w_1 , & y_2 - y_1 = a_1 \sin w_1 , \\ x_3 - x_2 = a_2 \cos w_2 , & y_3 - y_2 = a_2 \sin w_2 , \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ x_n - x_{n-1} = a_{n-1} \cos w_{n-1} , & y_n - y_{n-1} = a_{n-1} \sin w_{n-1} . \end{array}$$

3. Da für die Abschnitte der Strecken des Linienzuges *1—5* (Fig. 181):

$$AB + BC + CD + DE = AE ,$$

und weil dies auch der Achsenabschnitt der Strecke *15* ist, so folgt:

a) *Die Summe der Achsenabschnitte der Strecken eines Geradenzuges ist gleich dem Achsenabschnitt zu der Strecke vom ersten bis zum letzten Punkte desselben.*

b) *Diese Summe ist Null, wenn der Geradenzug geschlossen oder wenn die Schlußstrecke senkrecht zur Achse ist.*

Aus obigen Gleichungen folgt durch Zusammenzählen:

$$\left.\begin{array}{l} x_n = x_1 + a_1 \cos w_1 + a_2 \cos w_2 + \cdots\cdot a_{n-1} \cos w_{n-1} \\ y_n = y_1 + a_1 \sin w_1 + a_2 \sin w_2 + \cdots\cdot a_{n-1} \sin w_{n-1} . \end{array}\right\} \quad \text{(XIX)}$$

4. Wird in einem geschlossenen Geradenzug oder Vieleck 1, 2, 3, ... n der Punkt 1 als Nullpunkt, die Richtung $1n$ als positive x-Achse und die Drehung im Sinne des Innenwinkels von $\overline{1n}$ nach $\overline{12}$ als positive Drehung aufgefaßt, so ist in diesem Falle $x_1 = y_1 = 0$, $w_1 = \alpha_1$, $x_n = a_n$, $y_n = 0$. Benützt man nun die aus 1 sich ergebenden Werte von w_2, $w_3 \ldots . w_{n-1}$ und beachtet, daß bei einer Änderung des Winkels um 180^0 sin und cos bloß ihr Zeichen ändern (S. 166, § 48, 5 u 7), so folgt aus XIX:

$$\left.\begin{array}{l} a_n = a_1 \cos \alpha_1 - a_2 \cos (\alpha_1 + \alpha_2) + a_3 \cos (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ \qquad - \ldots . a_{n-1} \cos (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots . \alpha_{n-1}) \\ 0 = a_1 \sin \alpha_1 - a_2 \sin (\alpha_1 + \alpha_2) + a_3 \sin (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ \qquad - \ldots . a_{n-1} \sin (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots . \alpha_{n-1}) . \end{array}\right\} \quad \text{(XX)}$$

Diese beiden Gleichungen dienen zusammen mit der Gleichung (I. Teil, § 14, 5) $\qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots . \alpha_n = (n-2)\, 180^0$

zur Bestimmung von drei fehlenden Stücken, Seiten oder Winkeln eines Vielecks, aus den übrigen Seiten und Winkeln.

Da jede Seite a_r als erste Achse aufgefaßt werden kann, so ergeben sich aus diesen Formeln noch weitere durch fortschreitende Vertauschung der Marken.

5. a) Ein fehlender Winkel ergibt sich aus der letzteren Gleichung. Wenn noch außerdem zwei Seiten unbekannt sind, so nimmt man eine

derselben als a_n an. Die zweite Gleichung XX enthält dann als Unbekannte nur die andere Seite a_r; diese berechnet man zunächst und setzt dann ihren Wert in die andere Gleichung ein.

b) Sind eine Seite und zwei anliegende Winkel zu berechnen, so nimmt man eine an die fragliche Seite anstoßende als a_n, so daß a_{n-1}, α_{n-1} und α_n die fehlenden Stücke sind. Aus den Gleichungen XX folgt dann:

$$\pm a_{n-1} \sin(\alpha_1 + \ldots \alpha_{n-1}) = - a_1 \sin\alpha_1 + \ldots a_{n-2} \sin(\alpha_1 + \ldots \alpha_{n-2})$$
$$\pm a_{n-1} \cos(\alpha_1 + \ldots \alpha_{n-1}) = a_n - a_1 \cos\alpha_1 + \ldots a_{n-2} \cos(\alpha_1 + \ldots \alpha_{n-2}),$$

woraus durch Quadrieren und Addieren a_{n-1}, durch Teilen $\operatorname{tg}(\alpha_1 + \ldots \alpha_{n-1})$, somit α_{n-1} zu finden ist.

c) Liegen die beiden unbekannten Winkel an einer andern als der unbekannten Seite, so nimmt man diese andere Seite als a_n; die Gleichungen XX enthalten dann noch den unbekannten Winkel α_1 und die unbekannte Seite a_r.

Um überhaupt einen Winkel auszuscheiden, setzt man alle Glieder der beiden Gleichungen, die diesen Winkel enthalten, auf eine Seite, quadriert beide Gleichungen, addiert und vereinigt die entsprechenden Glieder, wobei unter Berücksichtigung von

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

und

$$\cos(x + y)\cos x + \sin(x + y)\sin x = \cos y$$

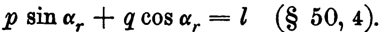
der betreffende Winkel herausfallen wird. So läßt sich α_1 durch Quadrieren u. Addieren der Gleichungen XX ausscheiden und dann die fragliche Seite a_r aus der entstandenen (quadratischen) Gleichung berechnen (2 Werte).

Um dann α_1 zu berechnen, trennt man in der zweiten Gleichung XX α_1 und die übrigen Winkel nach der Formel

$$\sin(\alpha_1 + s) = \sin\alpha_1 \cos s + \cos\alpha_1 \sin s;$$

man erhält so eine Gleichung von der Form $p \sin\alpha_1 + q \cos\alpha_1 = 0$ (vgl. S. 168, § 50, 2).

Zur Berechnung eines andern Winkels α_r würde dagegen die Gleichung die Form annehmen



$$p \sin\alpha_r + q \cos\alpha_r = l \quad (\S\ 50, 4).$$

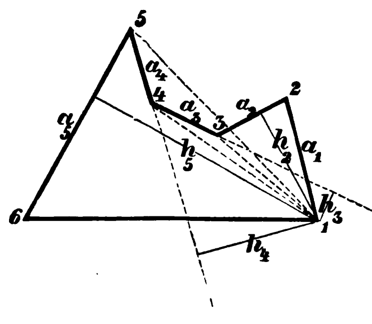


Fig. 183.

6. Um den Flächeninhalt des Vielecks zu bestimmen, betrachten wir der Reihe nach die Seiten $a_2, a_3, \ldots a_{n-1}$ als Grundseiten von Dreiecken, deren Gegenecken in 1 liegen. Die Höhen zu diesen Grundseiten werden berechnet als Ordinaten des Punktes 1 in Bezug auf die betreffende Grundseite als x-Achse, wobei entsprechend der Winkelmessung die Innenseite als die Seite der positiven Ordinaten genommen wird. Es ist (nach XIX):

$$h_2 = a_1 \sin \alpha_2$$
$$h_3 = a_2 \sin \alpha_3 - a_1 \sin(\alpha_3 + \alpha_2)$$
$$h_4 = a_3 \sin \alpha_4 - a_2 \sin(\alpha_4 + \alpha_3) + a_1 \sin(\alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_2) \text{ usw.}$$

Fällt hierbei die Höhe, wie h_4, auf die äußere Seite der Seitenstrecke a_4, so wird sie negativ. In der Tat ist dann aber wie ersichtlich auch das Dreieck 145 negativ zu nehmen, um durch Zusammenzählen der genannten Dreiecke den Flächeninhalt des Vielecks zu erhalten. [Die Flächen sind positiv, wenn sie, wie beim Umlauf der ganzen Fig. 1 2 3 . . ., links vom Umlauf (1 2 3 1) liegen, negativ, wenn sie rechts liegen (1 4 5 1).] Daher ist der doppelte Flächeninhalt:

$$\begin{aligned} 2J = {} & a_2 a_1 \sin \alpha_2 + a_3 [a_2 \sin \alpha_3 - a_1 \sin(\alpha_3 + \alpha_2)] \\ & + a_4 [a_3 \sin \alpha_4 - a_2 \sin(\alpha_4 + \alpha_3) + a_1 \sin(\alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_2)] \\ & + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & + a_{n-1} [a_{n-2} \sin \alpha_{n-1} - a_{n-3} \sin(\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}) \cdots \cdots \\ & \qquad a_1 \sin(\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} + \cdots \alpha_2)], \end{aligned}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} 2J = {} & a_1 [a_2 \sin \alpha_2 - a_3 \sin(\alpha_2 + \alpha_3) + \cdots a_{n-1} \sin(\alpha_2 + \cdots \alpha_{n-1})] \\ & + a_2 [a_3 \sin \alpha_3 - a_4 \sin(\alpha_3 + \alpha_4) + \cdots\cdots a_{n-1} \sin(\alpha_3 + \cdots \alpha_{n-1})] \\ & + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & + a_{n-2}\, a_{n-1} \sin \alpha_{n-1}. \end{aligned}\right\} \text{(XXI)}$$

Für ein Viereck folgt z. B.:

$$2J = a_1 [a_2 \sin \alpha_2 - a_3 \sin(\alpha_2 + \alpha_3)] + a_2 a_3 \sin \alpha_3.$$

§ 52. Anwendung der Winkelfunktionen in der Arithmetik.

A. Berechnung von Zahlenausdrücken.

1. Die Funktionstafeln können benützt werden, um irgendwelche Zahlenausdrücke zu berechnen.

Als man zwar schon solche Tafeln, aber noch keine logarithmische Tafeln hatte, wurde z. B. das Vervielfachen zweier Zahlen in folgender Weise in ein Zuzählen verwandelt (prosthaphäretische Methode)*). Sind a und b echte Brüche, so kann man α und β bestimmen aus $a = \sin \alpha$ und $b = \cos \beta$. Dann ist

$$a \cdot b = \sin \alpha \cdot \cos \beta = \tfrac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

nach XI (S 136, § 38, 1).

Sind a und b nicht < 1, so genügt das Teilen durch eine Potenz von 10, um dasselbe Verfahren anwenden zu können.

2. Die Tafeln für tg und cotg können benützt werden, um einen Teiler durch einen Faktor zu ersetzen, da $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$.

---

*) πρόσθεσις = Zufügen = Addition; ἀφαίρεσις = Wegnehmen = Subtraktion.

Z. B.: $x = \frac{a}{36,4} = \frac{0,01\,a}{0,364}$, $\operatorname{tg}\alpha = 0,364$, $\alpha = 20^0$, $\operatorname{cotg}\alpha = 2,747$,

$$x = 0,02747\,a.$$

3. Die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, in der a stets positiv sei, gibt für x die Werte:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}}\right),$$

a) Für einen reellen Wert von x muß $\frac{4ac}{b^2} < 1$ sein für den Fall, daß auch c positiv ist. Dann läßt sich der Winkel φ so bestimmen, daß

$$\frac{2\sqrt{ac}}{b} = \sin\varphi, \quad \text{so daß nun:}$$

$$x = -\frac{b}{2a}\left(1 \mp \sqrt{1 - \sin^2\varphi}\right) = -\frac{b}{2a}(1 \mp \cos\varphi)$$

$$x_1 = -\frac{b}{a}\sin^2\frac{\varphi}{2}, \qquad x_2 = -\frac{b}{a}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

Diese Auflösung ist dann mit Vorteil anzuwenden, wenn a, b und c vielzifferige Zahlen sind.

b) Für $-c$ statt $+c$ ist dieses Verfahren nicht zulässig. Es sei

$$ax^2 + bx - c = 0, \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a}\left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{4ac}{b^2}}\right).$$

Da hier ac positiv ist, läßt sich φ so bestimmen, daß $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{ac}}{b}$, also (mit Benützung von S. 135, § 37, 9):

$$x = -\frac{b}{2a}\left(1 \mp \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}\right) = -\frac{b}{2a}\left(1 \mp \frac{1}{\cos\varphi}\right) = -\frac{b}{2a}\,\frac{\cos\varphi \mp 1}{\cos\varphi}.$$

Es ist aber

$$\frac{b}{2a} = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\sqrt{\frac{c}{a}}, \quad \text{somit} \quad x = -\sqrt{\frac{c}{a}}\,\frac{\cos\varphi \mp 1}{\sin\varphi}$$

und (S. 135, § 37, 11)

$$x_1 = \sqrt{\frac{c}{a}}\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \qquad x_2 = -\sqrt{\frac{c}{a}}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}.$$

B. Darstellung der imaginären Zahlen.

4. Eine komplexe Zahl $x + iy$ (wo $i = \sqrt{-1}$) kann durch Winkelfunktionen dargestellt werden, indem man r und α so bestimmt, daß

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha, \quad \text{also} \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}.$$

Dann ist

$$x + yi = r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Diese letztere Form der komplexen Zahlen ist nun sehr geeignet, Produkte, Quotienten, Potenzen und Wurzeln derselben zu berechnen.

5. Wenn man auf einer Geraden (x-Achse) von einem Punkt aus nach der einen Richtung die positiven Zahlen in irgend einem Maß als Strecken darstellt, nach der anderen die negativen, so entspricht jeder Punkt der Geraden mit seinem Abschnitt x irgend einer positiven oder negativen reellen Zahl. Wenn x und y die rechtwinkeligen, r und α die Polarkoordinaten eines Punktes einer Ebene sind, so kann man jeden Punkt der Ebene entsprechen lassen einer imaginären Zahl von der Form

$$n = x + iy = r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Der Addition einer zweiten solchen Zahl

$$n_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$$

entspricht ein Punkt, dessen Koordinaten $X = x + x_1$, $Y = y + y_1$ sind. — Dieser Punkt wird aber auch erhalten, indem man r_1 am Endpunkt von r in der durch α_1 bestimmten Richtung anträgt. Denn wären dann X_1 und Y_1 die Koordinaten des Endpunktes von r_1, so wäre nach § 51, 2 (S. 171) $X_1 - x = r_1\cos\alpha_1 = x_1$, $Y_1 - y = r_1\sin\alpha_1 = y_1$; also $X = X_1$, $Y = Y_1$.

Der Subtraktion entspricht das Antragen von r_1 in der Gegenrichtung.

6. Für die Multiplikation von n mit n_1 beachte man, daß

$$\begin{aligned}(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1) \\ &= \cos\alpha\cos\alpha_1 - \sin\alpha\sin\alpha_1 + i(\sin\alpha\cos\alpha_1 + \cos\alpha\sin\alpha_1) \\ &= \cos(\alpha + \alpha_1) + i\sin(\alpha + \alpha_1);\end{aligned}$$

also

$$n n_1 = r r_1[\cos(\alpha + \alpha_1) + i\sin(\alpha + \alpha_1)].$$

Die Multiplikation mit n_1 wird hiernach in der Ebene ausgeführt, indem man von r aus um α_1 weiter dreht und auf dem dadurch erreichten Strahl die Strahlstrecke R so bestimmt, daß nach der gewählten Maßeinheit $rr_1 = 1 \cdot R$, $1 : r = r_1 : R$ (S. 104, § 28, 7a).

Ebenso ergibt sich die Division $\frac{n}{n_1} = \frac{r}{r_1}[\cos(\alpha - \alpha_1) + i\sin(\alpha - \alpha_1)]$, wo $\frac{r}{r_1}$ gemäß § 28, 2a Zus. (S. 100) zu zeichnen ist.

7. Tritt zu dem Produkt in 6 noch ein weiterer Faktor $(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$ hinzu, so ist das Produkt

$$= \cos(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2), \text{ usw.}$$

Ist $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2, \cdots$ so erhält man für die $n$te Potenz den Wert

$$\mathbf{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha.}$$

Dies ist die Moivresche Formel (Moivre 1730 und Euler 1748).

Da

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-n} = \frac{1}{\cos n\alpha + i\sin n\alpha} = \frac{\cos n\alpha - i\sin n\alpha}{\cos^2 n\alpha + \sin^2 n\alpha};$$

also $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-n} = \cos(-n\alpha) + i\sin(-n\alpha)$ (S. 166, § 48, 6), so gilt die genannte Formel auch für negative Exponenten.

Umgekehrt folgt aus ihr:

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = \left(\cos\frac{1}{n}\alpha + i\sin\frac{1}{n}\alpha\right)^n, \qquad \text{somit auch:}$$

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{1}{n}\alpha + i\sin\frac{1}{n}\alpha,$$

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}\alpha + i\sin\frac{m}{n}\alpha,$$

d. h.: die Moivresche Formel hat auch Geltung für Wurzeln oder für Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

So ist, wenn $x + iy = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ist,

$$\sqrt[n]{x+iy} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}\right).$$

8. Ist (in 4) $x = 1$, $y = 0$, so folgt $r = 1$, $\alpha = k \cdot 360^0$, wo k Null oder irgend eine ganze Zahl ist. Daher ist

$$1 = \cos k \cdot 360^0 + i\sin k \cdot 360^0, \quad \sqrt[n]{1} = \cos\frac{k \cdot 360^0}{n} + i\sin\frac{k \cdot 360^0}{n}.$$

Daraus ergeben sich n verschiedene Werte für $\sqrt[n]{1}$, indem man nacheinander $k = 0, 1, 2 \ldots (n-1)$ setzt. Würde man k die noch höheren Werte $n, n+1, \ldots$ beilegen, so würden sich die Werte wiederholen, indem die Funktionen von 0^0 und 360^0, von $\frac{360^0}{n}$ und $\left(360^0 + \frac{360^0}{n}\right)$ usw. übereinstimmen.

Ist $n = 2m$, so geben $k = 0$ und $k = m$ die beiden Werte $+1$ und -1, während die paarweise zusammengestellten Werte für $k = 1$ und $2m - 1$, 2 und $(2m-2), \ldots (m-1)$ und $(m+1)$ sich jeweils nur durch das Vorzeichen des imaginären Teiles unterscheiden (konjugierte Zahlen).

Ist dagegen $n = 2m + 1$, so gibt nur $k = 0$ einen reellen Wert 1, und es entsprechen einander in der angegebenen Weise die Werte für $k = 1$ und $2m$, 2 und $(2m-1), \ldots m$ und $(m+1)$

In gleicher Weise ergeben sich n Werte für

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\left(\frac{2k+1}{n}\right)180^0 + i\sin\left(\frac{2k+1}{n}\right)180^0,$$

wo $k = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$ gesetzt werden kann.

Für $\sqrt[n]{\pm p}$ erhält man je n Werte, indem man in $\sqrt[n]{\pm p} = \sqrt[n]{p} \cdot \sqrt[n]{\pm 1}$ die n Werte von $\sqrt[n]{\pm 1}$ als Faktor zu dem auf bekanntem Wege sich ergebenden ersten Werte von $\sqrt[n]{p}$ hinzusetzt.

Übungsaufgaben.

Aufgaben zur ersten Abteilung.

I. Aufgaben über Streckenverhältnisse.

1. Zeichne drei Strecken $a = 21$ mm, $b = 56$ mm, $c = 35$ mm, gib ein gemeinsames Maß derselben an und erprobe es. § 1.

2. Auf einer Strecke a kann eine andere b $x$mal abgetragen werden, dann der Rest c auf b $y$mal und der jetzt bleibende Rest d auf c $z$mal, wobei kein Rest bleibt. Man soll das Verhältnis von a zu b berechnen. — Beispiel: $x = 4$, $y = 3$, $z = 5$.

3. a) Welche Größe haben das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel zu zwei Strecken a und b, wenn letztere in Millimetern gegeben sind: α) 10 und 40? β) 20 und 180? γ) 10 und 90? δ) 12 und 48? § 2.

b) Suche weitere durch Zahlen angebbare Strecken, deren drei Mittel sich wieder durch ganze Zahlen angeben lassen.

c) Berechne das harmonische Mittel zu folgenden Saitenlängen, die harmonische Klänge geben: $1, \frac{1}{2}$; $1, \frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$; $1, \frac{3}{5}$; $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}$.

Aufgaben zum ersten Kapitel.

II. Lehrsätze.

1. Zieht man von beliebigen Punkten einer Geraden je zwei Strahlen nach den Grenzpunkten einer zu ihr parallelen Strecke, so werden auf einer dritten Parallelen durch jedes Strahlenpaar gleichgroße Strecken begrenzt. § 3.

2. Ein Dreieck, in dem zwei Schwerlinien einander gleich sind, ist gleichschenkelig. § 4.

3. Gleichschenkelige Dreiecke sind ähnlich, wenn ihre Winkel an der Spitze übereinstimmen, oder die an der Grundseite.

4. Zwei rechtwinkelige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis der beiden Katheten oder im Verhältnis einer Kathete zur Hypotenuse übereinstimmen.

5. In ähnlichen Dreiecken entsprechen einander nach Lage (Winkeln) und Größenverhältnis die Höhen entsprechender Seiten, die Halbierenden entsprechender Winkel, die zugehörigen Abschnitte, usw.

6. Dreiecke, deren Seiten paarweise aufeinander senkrecht stehen, sind ähnlich.

7. Zieht man durch den einen Schnittpunkt zweier einander

[§ 4.] schneidenden Kreise zwei Strahlen, die jeden dieser Kreise noch in einem weiteren Punkt schneiden, so werden durch die beiden Schnittpunkte je eines Strahles und durch den zweiten Schnittpunkt beider Kreise ähnliche Dreiecke bestimmt.

8. Von drei Kreisen, die zwei Punkte gemeinsam haben, begrenzen zwei auf den Strahlen eines dieser Punkte je eine Strecke, und der dritte Kreis begrenzt mit einem der ersteren je eine zweite Strecke so, daß das Verhältnis beider Strecken für alle Strahlen das gleiche ist. — Andeutung: Man benütze Aufg. 7.

§ 5. **9.** Von drei parallelen Strecken im Zweistrahl ist das Verhältnis der Unterschiede der zwei ersten zum Unterschied der zwei letzten gleich dem Verhältnis der zugehörigen Abschnitte auf einem Strahl.

10. Wenn bei drei parallelen Strecken a, b, c im Zweistrahl die eine c die Abschnitte der Strahlen zwischen den beiden andern im Verhältnis $p : q$ teilt, so ist

$$c = \frac{q \cdot a + p \cdot b}{p + q}.$$

11. Für jedes Dreieck ist die Summe der Entfernungen der Ecken von irgend einer Geraden gleich der dreifachen Entfernung seines Schwerpunkts von dieser Geraden.

III. Berechnungen und Zeichnungen.

§ 6. **1.** Von einer gegebenen Strecke a soll ein bestimmter Bruchteil $x = \frac{3}{7} a$ [oder $\frac{11}{15} a$] genau gezeichnet werden (indem die Strecken von gegebenem Verhältnis einem mm-Maßstab entnommen werden).

2. Zu einem gegebenen Bruchteil einer Strecke $\frac{3}{5} x = a$ soll die ganze Strecke x gezeichnet werden.

3. Der Meßkeil, der benützt wird zum Messen des kleinen Abstands zweier wagrecht (auf Böcken) liegenden Meßstangen (vgl. Aufg. XXIV Vorbem.), ist ein Keil, dessen obere Breite a und dessen Länge l sei. Wie ist die Länge l einzuteilen, damit die Zahl des Teilstrichs, bis zu welchem der Meßkeil zwischen den Stangen einsinkt, zugleich den Abstand der letzteren gibt?

4. a) Trägt man auf einer Geraden zehn beliebige gleiche Teile ab, am Endpunkt senkrecht zu ihr ein mm, und verbindet man den Endpunkt des letzteren mit dem Anfangspunkt der Strecke, so lassen sich auf den Senkrechten der übrigen Teilpunkte $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ mm u. s. f. abmessen.

b) Man soll einen Quer- oder Transversalmaßstab entwerfen für $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{80}$, $\frac{3}{200}$, $\frac{17}{450}$ d. w. G. (= der wahren Größe).

5. Durch einen Punkt soll eine Gerade derart gezogen werden, daß sie auf den Schenkeln eines Winkels Strecken von gegebenem Verhältnis $p : q$ begrenzt.

6. Durch einen gegebenen Punkt ist eine Gerade so zu ziehen, daß die zwischen die Schenkel eines gegebenen Winkels fallende Strecke durch den Punkt in gegebenem Verhältnis $p:q$ geteilt wird. [§ 6.]

7. Durch einen Punkt soll eine Gerade so gelegt werden, daß ihre Abstände von zwei gegebenen Punkten in einem gegebenen Verhältnis $p:q$ stehen.

8. Zwei mit ihren Nullpunkten zusammengelegte Maßstäbe (oder solche, die an diesen Punkten durch ein Charnier verbunden sind, (Proportionalzirkel) sollen benützt werden, um:

a) zu einer gegebenen Strecke a die Strecken $\frac{35}{81}a$, $\frac{27}{14}a$ u. ä. zu finden. (Mache den Winkel beider Lineale so groß, daß bei 81 mm a als Abstand der Teilpunkte hineinpaßt und messe den Abstand bei 35 mm.)

b) zu drei Strecken a, b, c das vierte Verhältnisglied x zu finden: $a:b=c:x$. (Trage a auf beide Maßstäbe ab, öffne den Winkel derselben, bis b in den Endpunkten von a als Abstand in den Winkel paßt, trage c auf beide Maßstäbe ab; der Abstand der Endpunkte von c ist x.)

9. Auf einer Geraden sei eine Strecke $AB = 20$ mm durch einen Punkt Q geteilt. Man soll für verschiedene Lagen von Q Art und Größe des Verhältnisses $AQ:QB=V$ berechnen, nämlich für $AQ = 5,\ 16,\ 25,\ -4$ mm. § 7.

10. In der vorigen Aufgabe werde Q um 2 cm in der Geraden nach der einen oder andern Richtung verschoben; man soll zuerst ohne Rechnung die Art der Änderung von V angeben und dann das neue Verhältnis berechnen.

11. Auf einer Geraden seien von einem Punkt A aus nach einerlei Richtung drei weitere Punkte P, Q, R entfernt um 11, 23 38 mm; welches sind die Werte der zwischen P, Q, R möglichen Teilverhältnisse?

12. Wo liegt auf der Strecke $AB = 20$ mm (oder auf deren Verlängerung) der Teilpunkt Q, dessen Teilverhältnis $AQ:QB = \frac{2}{3},\ 9,\ -3\frac{1}{2},\ -\frac{3}{7}$ sein soll? Die Strecke AB ist zu zeichnen und die Punkte sind einzutragen.

13. Wo liegt der Endpunkt einer Strecke AB, wenn

$$AQ = 18\,(24)\text{ mm} \quad \text{und} \quad AQ:QB = 6\,(-7).$$

14. Es sind zwei Strecken zu zeichnen, deren Summe s (oder Unterschied d) und Verhältnis $p:q$ gegeben sind.

Aufgaben zum zweiten Kapitel.

IV. Lehrsätze.

§ 8. **1.** In einem Dreieck ist das Produkt aus Grundseite und zugehöriger Höhe das gleiche für jedes zusammengehörige Paar. Beweis?

2. In einem Dreieck wird die Verbindungsgerade der Höhenfußpunkte auf zwei Seiten, um deren Winkelhalbierende gewendet, parallel der dritten Seite.

3. In einem Dreieck teilt der Schnittpunkt der drei Höhen die letzteren so, daß jedesmal das Produkt der beiden Abschnitte den gleichen Wert hat.

4. Ist in einem rechtwinkeligen Dreieck eine Kathete das geometrische Mittel zwischen den beiden andern Seiten, so ist die zweite Kathete gleich dem Abschnitt auf der Hypotenuse unter der ersteren Kathete.

5. Umkehrung dieses Satzes?

6. Im rechtwinkeligen Dreieck verhalten sich die Abschnitte der Hypotenuse wie die Quadrate der Katheten.

7. Zieht man durch irgend einen Punkt eines Kreisbogens zwei Parallelen zu den Berührenden seiner Grenzpunkte, so ist die von der zugehörigen Sehne begrenzte Strecke jeder dieser Parallelen das geometrische Mittel zwischen den Abschnitten der Sehne, die zwischen den Parallelenpaaren liegen.

§ 9. **8.** Legt man durch zwei Punkte A und B beliebige Kreise, so sind die von einem dritten Punkt C der Geraden AB an diese Kreise gezogenen Berührenden alle einander gleich.

9. In einem Kreise verhalten sich die Quadrate zweier von einem Punkt ausgehenden Sehnen wie die unter ihnen liegenden Abschnitte auf dem Durchmesser dieses Punktes.

10. Wenn in einem Eck eines Dreiecks an dessen Umkreis die Berührende gezogen wird, so teilt sie die Gegenseite im Verhältnis der Quadrate der anliegenden.

11. Die beiden Strahlstrecken einer Geraden von einem Punkte des Umfangs eines Kreises, welche von diesem Kreis und von einer zum Durchmesser des ersteren Punktes senkrechten Geraden begrenzt werden, ergeben ein Produkt, das für alle Strahlen das gleiche bleibt.

12. Durchschneidet in vorangehender Aufgabe die Senkrechte den Kreis, so ist das genannte Produkt gleich dem Quadrat der Sehne von dem erstgenannten Punkt nach dem Schnittpunkt der Geraden und des Kreises.

13. Zieht man in einem Sehnenviereck $ABCD$ zu der Berührenden des Punktes A eine Parallele, die von AB, AC und AD

in B_1, C_1 und D_1 getroffen werde, so sind $B_1 C_1$, $C_1 D_1$ und $B_1 D_1$ [§ 9.] gewendet parallel zu BC, CD und BD in den zugehörigen Zweistrahlen aus A. — Es soll hierdurch nachgewiesen werden, daß

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

(Vgl. S. 97, § 27, 7.)

14. Beschreibt man über dem Durchmesser eines Halbkreises ein Rechteck von der Höhe des Halbmessers und zieht eine Eckenlinie, so schneidet der Kreis von dieser $\frac{1}{5}$ ab. (Benütze § 8, 4 und § 9, 4.)

15. Trägt man in einen Spitzbogen (Figur, die von zwei Bögen gleicher Kreise und der Mittellinie der Kreise begrenzt ist), den Halbmesser der Bögen auf der Mittellinie der Figur (gemeinsamen Sehne der Kreise) von der Grundlinie aus ab, und zieht man vom Endpunkt dieser Strecke eine Berührende, so berührt diese im Berührungspunkt des der Figur einbeschriebenen Kreises.

16. Beschreibt man über dem begrenzenden Durchmesser eines Halbkreises zwei diesen berührende Halbkreise je mit der Hälfte des Halbmessers als Halbmesser, so ist der Halbmesser eines vierten Kreises, der alle drei Kreise berührt, $= \frac{1}{3}$ des ersten Halbmessers. (Benütze § 9, 4.)

17. Zieht man in der Figur zu Nr. 16 durch die Mittelpunkte der beiden gleichen Halbkreise die Senkrechte zum begrenzenden Durchmesser und durch den Mittelpunkt des zuletzt bestimmten Kreises die Parallele zu ihm, so erhält man die Mittelpunkte zweier Kreise, die je drei der gezeichneten Kreise berühren; der Halbmesser dieser Kreise ist $\frac{1}{6}$ des ersten Halbmessers.

V. Zeichnungen.

1. Der Satz § 9, 2 soll zur Bestimmung des vierten Verhältnisgliedes der Strecken a, b, c benützt werden.

2. Das geometrische Mittel zu a und b soll gemäß § 9, 4 bestimmt werden. § 10.

3. Um das geometrische Mittel zu zwei Strecken zu erhalten, trägt man von beiden Grenzpunkten A und A_1 der kleineren Strecke die größere so auf, daß AA_1 ein Teil dieser Strecken AB und $A_1 B_1$ ist; dann beschreibt man mit letzteren Strecken von B und B_1 Kreisbögen, die sich in C schneiden. Die Strecke AC ist das gesuchte Mittel. — Beweis ($\triangle ACA_1 \backsim ACB$).

4. Den goldenen Schnitt einer Strecke a erhält man, indem man mit a und $2a$ als Katheten ein rechtwinkeliges Dreieck zeichnet und den Gegenwinkel von $2a$ halbiert. Der an a angrenzende Abschnitt

von $2a$ ist die gesuchte Strecke. — Beweis? (Berechne die Hypotenuse und benütze den Satz § 7, 2, S. 20).

5. Es ist eine Strecke a) innen oder b) außen so zu teilen, daß eine zweite gegebene Strecke das geometrische Mittel zwischen beiden Abschnitten ist.

6. Es ist eine Strecke a innen oder außen so zu teilen, daß das Produkt der Abschnitte gleich dem Produkt zweier gegebenen Strecken b und c ist. (Man nimmt, je nachdem $a \lesseqgtr b + c$ oder $a \gtreqless b - c$ ist, a oder letztere Größe als Durchmesser.)

Aufgaben zum dritten Kapitel.

VI. Lehrsätze.

§ 11. **1.** Zum Abzeichnen einer Vorlage in gleichem oder verändertem Maßstab dient der Storchschnabel oder Pantograph (Scheiner 1603). Vier durchlöcherte Lineale sind so zu einem Parallelogramm $ABCD$ verbunden, daß sich die Seiten gegeneinander in Gelenken drehen lassen; zwei Seiten DA und DC sind verlängert. Legt man bei beliebiger Stellung des Parallelogramms eine Gerade hindurch, die die Verlängerung von DA in S, von DC in F und die AB in E schneidet und hält man einen der 3 Punkte S, E, F durch einen Stift fest, so bleiben bei jeder Drehung der Lineale die 3 Punkte stets auf einer Geraden und die Strahlstrecken behalten das gleiche Verhältnis bei; denn es ist stets $AE \parallel DF$ und $SA : SD = AE : DF$. Wird z. B. der Stift S festgehalten und beschreibt ein Stift in F eine gegebene Figur, so zeichnet der Bleistift in E ein ähnliches Bild im Verhältnis $SE : SF = SA : SD$. Wird E festgehalten und mit S gezeichnet, so ist der Maßstab $= SE : EF = SA : AD$. Der Maßstab wird umgekehrt, wenn Bleistift und Führungsstift vertauscht werden. Setzt man den festen Stift nach B und macht man $AS = AD$, $CF = DC$, so ist das Bild, das S zeichnet, der von F beschriebenen Vorlage gleich.

Wenn $DA = a$, $DF = b\ [= 2a]$ ist, wie groß sind AS und AE zu nehmen und wo sind der feste Stift, der Führungsstift und Zeichenstift einzusetzen, um abzuzeichnen im Maßstab $1:2$, $2:3$, $3:4$, $1:3$, $1:4$? — und umgekehrt?

2. In einer Figur mit einem Mittelpunkt liegen die gegengesetzten Teile ähnlich zum Mittelpunkt als innerem Ä.-Punkt.

3. Zwei ähnliche und ähnlich liegende Figuren mit je einem Mittelpunkt haben einen inneren und einen äußeren Ä.-Punkt, der die Strecke der Mittelpunkte harmonisch teilt.

4. Regelmäßige Vielecke von gleicher Seitenzahl sind einander ähnlich. Sie liegen ähnlich, wenn eines ihrer Seitenpaare parallel ist.

5. Regelmäßige Vielecke von gleicher und zwar gerader Seitenzahl, von denen zwei Seiten parallel sind, liegen ähnlich zu einem inneren und zu einem äußeren Ähnlichkeitspunkt.

6. Zieht man in einem Dreieck von dem Schnittpunkt einer Höhe mit ihrer Seite Senkrechte zu den beiden andern Seiten, so ist die Verbindungsgerade der Fußpunkte der letzteren parallel zur Verbindungsgeraden der Fußpunkte der beiden andern Höhen.

7. Fällt man in einem Dreieck von dem Fußpunkt A_1 einer Höhe AA_1 Senkrechte zu den Seiten, $A_1B_2 \perp AC$ und $A_1C_2 \perp AB$, und auch auf die beiden andern Höhen, $A_1C_3 \perp CC_1$, $A_1B_3 \perp BB_1$, so liegen die vier Fußpunkte dieser Senkrechten auf einer Geraden. (Da $\triangle A_1B_2C_3$ p. ä. BB_1C_1, so fällt nach dem vorhergehenden Satz B_2C_3 auf B_2C_2.)

8. In einem Viereck gehen die Verbindungsgeraden der Mitten der Gegenseiten und der Mitten der Eckenlinien durch einen Punkt. (Je drei Punktpaare bilden ähnlich liegende Dreiecke.)

9. Zieht man zu den Parallelen eines Trapezes eine Parallele, die von den beiden Eckenlinien begrenzt wird, zieht man ferner durch die Grenzpunkte zu jeder der andern Seiten eine Parallele, die ebenfalls durch die Eckenlinie begrenzt wird, so bestimmen die vier Grenzpunkte ein Trapez, das dem ursprünglichen ähnlich liegt.

10. Es gibt für zwei Strecken AB und A_1B_1 (oder irgend zwei gleichwendige ähnliche Figuren) stets einen Punkt S (Situationspunkt) von der Lage, daß durch eine Drehung um ihn beide Strecken p. ä. werden zu demselben Punkt als Ähnlichkeitspunkt. Dieser Punkt ist der Schnittpunkt S der Kreise, welche durch den Schnittpunkt C der Geraden AB und A_1B_1 und durch AA_1 sowie um CBB_1 gelegt werden. — Andeutung: Die Winkel ASA_1 und BSB_1 stimmen mit ACA_1 überein, woraus folgt $\sphericalangle ASB = A_1SB_1$; ebenso ist $\sphericalangle SAC = SA_1C$.

11. a) Ein Dreieck liegt ähnlich zu dem Dreieck der Mitten seiner Seiten.

b) Dem Höhenpunkt des ersteren (I. Teil, § 20, 3) entspricht in dem zweiten Dreieck der Mittelpunkt des dem ersteren umbeschriebenen Kreises.

c) Die Strecke zwischen beiden Punkten wird durch den Schwerpunkt im Verhältnis $2:1$ geteilt.

d) Zieht man in ersterem Dreieck Eckstrahlen durch einen Punkt und jeweils Parallele zu diesen Eckstrahlen durch die Mitten der Gegenseiten, so gehen diese Parallelen ebenfalls durch einen Punkt. Die Verbindungsstrecke beider Punkte wird durch den Schwerpunkt im Verhältnis $2:1$ geteilt.

e) Der einem Dreieck umbeschriebene Kreis und der Kreis durch

§ 12. die Mitten der Seiten haben den Schwerpunkt als inneren Ähnlichkeitspunkt. Ihre Halbmesser stehen im Verhältnis 2 : 1.

f) Der Mittelpunkt des durch die Seitenmitten gelegten Kreises halbiert den Abstand des Mittelpunkts des umbeschriebenen Kreises und des Höhenpunkts.

g) Der Kreis in f) geht auch durch die Fußpunkte der Höhen des Dreiecks.

h) Der Höhenpunkt ist äußerer Ähnlichkeitspunkt beider Kreise.

i) Der kleinere Kreis geht durch die Mitten der vom Höhenpunkt nach den Ecken gezogenen Strecken.

k) Der Mittelpunkt dieses Kreises halbiert die Verbindungsstrecken von den Seitenmitten nach den eben genannten Mittelpunkten.

l) Der Abstand des Mittelpunkts des umbeschriebenen Kreises von einer Seite ist gleich der Hälfte des obern Abschnitts der zugehörigen Höhe.

m) Die Mittelpunkte zweier oberen Höhenabschnitte bestimmen mit den Mittelpunkten der zu den betreffenden Höhen gehörigen Seiten je ein Rechteck.

n) Verlängert man einen unteren Höhenabschnitt um seine eigene Länge, so liegt der Endpunkt der Verlängerung auf dem umbeschriebenen Kreis.

o) Verlängert man die Strecke vom Fußpunkt einer Höhe nach dem Schwerpunkt um ihre doppelte Länge, so liegt der Endpunkt auf dem umbeschriebenen Kreis.

p) Die auf den Strahlen des Höhenpunkts zwischen beiden Kreisen liegenden Strecken werden durch den Höhenpunkt außen im gleichen Verhältnis 1 : 2 geteilt.

q) Die auf den Strahlen des Schwerpunkts zwischen beiden Kreisen liegenden Strecken werden durch den Schwerpunkt in gleichem Verhältnis geteilt.

12. a) Der Kreis durch zwei Ecken und den Höhenpunkt eines Dreiecks ist gleich dem Umkreis des Dreiecks.

b) Zu den beiden Kreisen in a) ist die Seite zwischen beiden Ecken die Mittellinie.

c) Die Mittelpunkte der drei Kreise durch je zwei Ecken und den Höhenpunkt bilden ein Dreieck, das zu dem gegebenen Dreieck gegengesetzt liegt in Bezug auf den Mittelpunkt des Kreises durch die Seitenmitten.

13. a) Verbindet man in einem Dreieck ein Eck mit dem Punkt, in welchem die Gegenseite durch den ihr anbeschriebenen Kreis berührt wird, so geht diese Gerade durch den Endpunkt des zur genannten Seite senkrechten Durchmessers des Inkreises. (§ 12, 1b).

b) Diese Verbindungsgerade ist parallel der Geraden vom Mittel-

punkt des Inkreises nach der Mitte der genannten Seite (s. I. Teil, § 35, Zus. 2). [§ 12.]

c) Die Eckstrahlen nach den Berührungspunkten der drei Ankreise auf den Seitenstrecken gehen durch einen Punkt (Nagel'schen Punkt), der mit dem Mittelpunkt des Inkreises und dem Schwerpunkt des Dreiecks auf einer Geraden liegt; der Schwerpunkt teilt die Strecke der beiden andern Punkte im Verhältnis 2 : 1 (dies folgt aus *b* und 11 d).

VII. Zeichnungen und Berechnungen.

1. Zu einem gegebenen Vieleck V ist ein ähnlichliegendes V_1 zu zeichnen, wenn der (innere oder äußere) Ä.-Punkt gegeben und dazu

a) das Bild eines bestimmten Eckes von V;

b) das Seitenverhältnis von V und $V_1 = 1:2$; $1:1$; $p:q$;

c) die Länge des Bildes einer bestimmten Seite von V.

2. Über einer gegebenen Strecke ist ein Vieleck zu zeichnen, das einem gegebenen Vieleck ähnlich ist und in dem die gegebene Strecke einer bestimmten Seite dieses Vielecks entspricht.

3. Die Seiten eines Dreiecks sind zu berechnen, das einem gegebenen Dreieck mit den Seiten 13, 14, 15 ähnlich ist, und in dem eine Seite von der Länge 39 (oder $32\frac{1}{2}$ oder 17) das Bild der Seite 13 ist.

4. Der Schatten eines lotrechten Stabes von a m Länge ist b m auf wagrechter Ebene. Wie hoch ist ein Turm, dessen Schattenende die Entfernung c m vom Mittelpunkt des Grundrisses hat?

5. Zu zwei ähnlichen Punktreihen auf einem Träger ist der sich selbst entsprechende Punkt (Ähnlichkeitspunkt) zu bestimmen mit Hilfe zweier ähnlichen Dreiecke über entsprechenden Strecken.

6. Von zwei Kreisen seien die entsprechenden Halbmesser r_1 und r_2 und die Entfernung d ihrer Mittelpunkte in mm gegeben, nämlich

$r_1 =$	10	4	15	6	15
$r_2 =$	6	6	10	9	5
$d =$	24	10	5	10	4.

Man soll die Lage ihrer Ähnlichkeitspunkte zeichnend und rechnend bestimmen.

7. Von einem gegebenen Punkt aus ist eine Gerade durch zwei Kreise zu ziehen, deren Sehnen sich wie die zugehörigen Halbmesser verhalten.

8. Man soll ein Dreieck zeichnen, von dem erstens eines der folgenden Stücke gegeben ist: § 13.

a) eine Seite, b) eine Höhe, c) der Halbmesser des umbeschriebenen Kreises, d) der Halbmesser des einbeschriebenen Kreises und zweitens entweder:

α) zwei Winkel, oder β) das Verhältnis zweier Seiten und ein

[§ 13.] Winkel, oder γ) die Verhältnisse der drei Seiten, oder δ) das Verhältnis einer Höhe und Seite und deren Gegenwinkel, oder ε) die Verhältnisse der drei Höhen.

9. Man soll ein Dreieck zeichnen, dessen drei Höhen gegeben sind.

10. Man soll ein Trapez zeichnen, von dem eine Grundseite, die Winkel an ihr und das Verhältnis der zweiten Grundseite zu einer der nicht parallelen Seiten gegeben ist.

11. Ein Dreieck ist zu zeichnen, von dem gegeben ist ein Eck, die Mitte der Gegenseite und der Höhenpunkt. (Man bestimme den Schwerpunkt und den Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises.)

12. Ebenso, wenn gegeben ein Eck, der Höhenpunkt und a) der Mittelpunkt der Ecken, oder b) der Schwerpunkt.

13. Ebenso, wenn gegeben ein Eck, der Schwerpunkt und der Mittelpunkt der Ecken.

14. Man soll in ein Dreieck ein zweites zeichnen, das einem weiteren gegebenen Dreieck ähnlich und dessen eine Seite einer gegebenen Geraden parallel ist.

15. In ein Dreieck ist ein Viereck zu zeichnen, so daß zwei Ecken desselben auf eine Seite, die beiden andern auf die anderen Seiten fallen, und das einem gegebenen Viereck ähnlich ist (etwa ein Rechteck mit gegebenem Seitenverhältnis).

16. Es soll in einen a) Kreisausschnitt oder b) Kreisabschnitt ein Quadrat gezeichnet werden, dessen Ecken auf den Grenzlinien liegen.

17. Man soll ebenso in einen Kreis (oder Halbkreis) ein Rechteck von gegebenem Seitenverhältnis einzeichnen.

18. Ein Berührungskreis ist zu zeichnen zu einem Kreis und zwei Geraden, für die ein Durchmesser des Kreises Mittellinie ist.

19. Man soll ein Dreieck zeichnen, von dem gegeben ist eine Seite c, deren Gegenwinkel γ und das Verhältnis $p:q$ der diesen Winkel Halbierenden zu einem Abschnitt, den letztere auf der Seite c bildet. (Zu dem Eckpunkt des Abschnitts als Ä.-Punkt zeichnet man ein Dreieck aus dem Winkel $\frac{\gamma}{2}$ und dem Seitenverhältnis $p:q$, das zu dem fraglichen Teildreieck ähnlich liegt.)

Aufgaben zum vierten Kapitel.

VIII. Lehrsätze.

§ 14. **1.** Für den Zweistrahl S (S. 40, Fig. 44) mit den sich schneidenden Geraden AB und A_1B ergeben sich aus § 14, 1a folgende Gleichungen:

[§ 14.]

$$\frac{AX}{A_1X_1} : \frac{SA}{SA_1} = \frac{XB}{X_1B},$$

$$\frac{A_1A}{AS} : \frac{X_1X}{XS} = -\frac{A_1B}{BX_1}, \qquad \frac{AA_1}{A_1S} : \frac{XX_1}{X_1S} = -\frac{AB}{BX},$$

$$\frac{A_1S}{SA} : \frac{X_1S}{SX} = \frac{A_1B}{BX_1} : \frac{AB}{BX}.$$

Je mehr B hinausrückt, desto mehr nähern sich die rechtsstehenden Verhältnisse $\left(\text{z. B. } \frac{A_1B}{BX_1} = \frac{A_1X_1}{BX_1} + \frac{X_1B}{BX_1} = \frac{A_1X_1}{BX_1} - 1\right)$ der Zahl 1 und die Formeln denen in § 3, 2 und 1, (S. 12).

2. Zieht man durch einen Punkt Eckstrahlen zu einem Dreieck und verwechselt die durch sie gebildeten Abschnitte je einer Seite, so gehen die diesen Abschnitten entsprechenden Eckstrahlen ebenfalls durch einen Punkt.

3. Errichtet man auf den Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks nach außen Quadrate und verbindet je einen Grenzpunkt der Hypotenuse mit dem Eck des Gegenquadrats, so schneiden einander beide Verbindungsgeraden auf der Höhe des Dreiecks. (Man benütze § 3, 2, § 8, 2 und § 14, 2).

4. Wenn von drei durch einen Punkt gehenden Eckstrahlen eines Dreiecks zwei je $\frac{1}{3}$ der Seite von einem Eck aus abschneiden, so wird der dritte Eckstrahl durch den gemeinsamen Schnittpunkt halbiert.

5. Zieht man von einem Punkt des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises aus Senkrechte zu den Seiten, so liegen deren Fußpunkte in einer Geraden (Simsonsche Gerade). — And.: Man ziehe die Eckstrahlen des Punktes und benütze die entsprechenden ähnlichen Dreiecke, um die Seitenabschnitte in diesen Eckstrahlen und Senkrechten auszudrücken. — Ein anderer Beweis ergibt sich aus den Winkeln der Sehnenvierecke, die der Punkt mit je einem Eck und den Fußpunkten auf den dieses Eck bildenden Seiten bestimmt.

6. Fällt man vom Fußpunkt der Höhe auf der Seite eines Dreiecks Senkrechte auf die beiden andern Seiten und Höhen, so liegen die vier Punkte auf einer Geraden. (Besonderer Fall der vorhergehenden Aufgabe.)

7. Die durch einen Punkt gehenden Eckstrahlen eines Dreiecks teilen dessen Seiten so, daß die Summe der Teilverhältnisse zweier von einem Eck ausgehenden Seitenstrecken gleich ist dem Teilverhältnis des Strahles von demselben Eck. — Andeutung: Wende den Satz des Menelaos auf die beiden durch diesen Strahl gebildeten Teildreiecke an, bestimme daraus die Verhältnisse der andern Seiten und zähle zusammen.

8. Von zwei Strahlen eines Punktes auf einer Eckenlinie eines Vierecks schneidet jeder ein Seitenpaar, das je einen Grenzpunkt der

[§ 14.] andern Eckenlinie bildet, in zwei Punkten so, daß das Produkt der in fortlaufender Reihe auf den Seiten entnommenen Teilverhältnisse $= +1$ ist, — und umgekehrt: wenn dieses der Fall ist, so schneiden einander die beiden Strahlen in einem Punkt der Eckenlinie.

9. Hierbei schneiden einander die Verbindungsgeraden der Schnittpunkte je eines Seitenpaares, das einen Grenzpunkt der ersten Eckenlinie bildet, auf der zweiten Eckenlinie des Vierecks (vgl. § 21, 1').

§ 15. **10.** Wenn man in einer Punktreihe je eine Strecke von einem Punkt nach dem Fluchtpunkt der Reihe vervielfacht mit der Strecke vom Bild des Punktes nach dem Fluchtpunkt des Bildes der Reihe, so ergibt sich stets derselbe Wert, und zwar derselbe, wie aus den beiden Strahlstrecken der Fluchtpunkte.

11. Wird eine Strecke AB durch P innen und Q außen harmonisch geteilt, so ist:

a) $$\frac{1}{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ}\right),$$

b) $$\frac{1}{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{PB} - \frac{1}{BQ}\right).$$

12. Werden Punkte in gleichen Abständen auf einer Geraden $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1E_1 \ldots\ldots$ auf einer zweiten Geraden in A, B, C, D abgebildet (Perspektive einer Fensterreihe, Säulenhalle, Pappelallee) und trifft der zu ersterer Geraden parallele Strahl die zweite Gerade im Punkt P (Fluchtpunkt), so ist:

a) $$\frac{2}{PB} = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PC}, \qquad \frac{2}{PC} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PD}, \ldots\ldots$$

b) $$\frac{1}{PB} - \frac{1}{PA} = \frac{1}{PC} - \frac{1}{PB} = \frac{1}{PD} - \frac{1}{PC} \ldots\ldots$$

13. Jeder Winkel des Dreiecks der Seitenmitten eines gegebenen Dreiecks wird durch die zugehörige Seite und Schwerlinie der letzteren harmonisch geteilt. Auf den beiden andern Schwerlinien entstehen vier harmonische Punkte.

14. In einem Trapez bilden die beiden Mittelpunkte der parallelen Seiten mit dem Schnittpunkt der Eckenlinien und dem der nicht parallelen Seiten vier harmonische Punkte.

15. Zieht man in einem Dreieck drei Eckstrahlen durch einen Punkt, so wird jede Seite von einer solchen und der Verbindungsgeraden der Punkte, in denen die beiden andern Seiten geschnitten werden, harmonisch geteilt.

§ 16. **16.** Verbindet man in einem Dreieck die Schnittpunkte einer Geraden und der Seiten mit den Ecken, so erhält man auf jeder dieser Verbindungsgeraden vier harmonische Punkte.

17. Verbindet man in einem Dreieck die Punkte, in denen die Eckstrahlen eines Punktes die Seiten schneiden, miteinander, so erhält man in jedem dieser Punkte vier harmonische Strahlen.

18. Bestimmt man auf den drei Seiten eines Dreiecks ABC die [§ 16.] den Schnittpunkten $A_1 B_1 C_1$ einer Geraden harmonisch zugeordneten Punkte $A_2 B_2 C_2$, so a) liegen auch die Punkte $A_1 B_2 C_2$, $A_2 B_1 C_2$, $A_2 B_2 C_1$ je auf einer Geraden; b) gehen die Eckstrahlen nach $A_1 B_2 C_1'$, $A_1 B_1 C_2$, $A_2 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ je durch einen Punkt.

19. Zieht man zwischen den Schenkeln eines Winkels einen Parallelstrahlenbüschel und verbindet die Schnittpunkte der Schenkel und je zweier der Parallelen untereinander, so liegen die Schnittpunkte je zweier dieser Verbindungsgeraden auf einer Geraden, die die Parallelstrecken halbiert.

20. In vollständigen Vierecken, welche zwei Gegenseiten und die Verbindungsgerade von deren Nebeneck nach einem zweiten Nebeneck gemeinsam haben, fallen auch die Verbindungsgeraden des ersten und dritten Nebenecks zusammen.

20'. In vollständigen Vierseiten, welche zwei Gegenecken und den Schnittpunkt von deren Nebenseite mit einer zweiten Nebenseite gemeinsam haben, fallen auch die Schnittpunkte der ersten und dritten Nebenseite zusammen.

21. In einem vollständigen Viereck wird jede Seite durch ein Nebeneck und den Schnittpunkt mit der Verbindungsgeraden der beiden andern Nebenecken harmonisch geteilt.

21'. In einem vollständigen Vierseit wird der Winkel benachbarter Seiten durch eine Nebenseite und den Strahl nach dem Schnittpunkt der beiden andern Nebenseiten harmonisch geteilt.

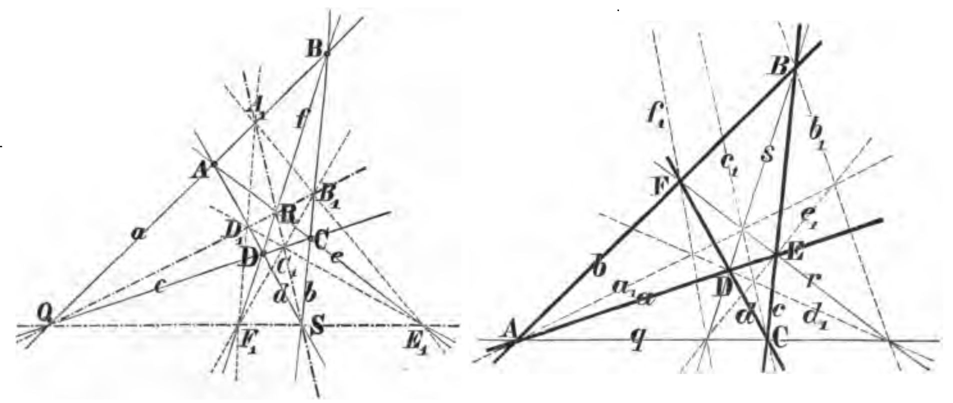


Fig. 184. Fig. 185.

22. In einem vollständigen Viereck bilden die Schnittpunkte der Seiten mit den Verbindungsgeraden der Nebenecken die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits.

22'. In einem vollständigen Vierseit bilden die Verbindungsgeraden der Ecken mit den Schnittpunkten der Nebenseiten die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks.

[§ 16.] **23.** In einem vollständigen Vierseit liegen die Mittelpunkte der Nebenseiten auf einer Geraden. (In dem Dreiseit dreier Seiten des Vierseits gehen die Verbindungsgeraden der Seitenmitten durch die Mittelpunkte der Nebenseiten. Wendet man auf ersteres Dreieck mit der vierten Seite des Vierseits als Schnittgerade den Satz von Menelaos an, so entspricht die Halbierung aller Strecken den Abschnitten, welche die fraglichen Mittelpunkte in dem Dreieck der Seitenmitten bilden.)

§ 17. **24.** Jede auf einem Durchmesser eines Kreises senkrechte Sehne wird von zwei Geraden, die einen beliebigen Punkt des Umfangs mit den Grenzpunkten des Durchmessers verbinden, harmonisch geteilt.

25. Jeder Kreis durch zwei zugeordnete Pole eines Kreises schneidet diesen rechtwinkelig.

26. Schneidet ein Kreis einen zweiten rechtwinkelig, so wird jeder Durchmesser des einen durch den Umfang des andern harmonisch geteilt.

27. Durch zwei Paare zugeordneter Pole eines Kreises läßt sich ein Kreis legen.

28. Die Mittellinie zweier einander ausschließenden Kreise wird durch die äußeren und inneren gemeinsamen Berührenden harmonisch geteilt.

29. Von einem Kreis, dessen Mittelpunkt auf einem zweiten Kreis liegt, wird jeder Durchmesser durch die gemeinsame Sehne und den Umfang des zweiten Kreises harmonisch geteilt. (Durch die Verbindungsgerade eines Schnittpunkts beider Kreise mit dem Mittelpunkt des ersteren und mit dem äußeren Teilpunkt des Durchmessers entsteht ein Zweistrahl mit gewendet Parallelen.)

IX. Zeichnungen und Berechnungen.

§ 15. **1.** Auf einer Strecke $AB = 20$ mm liegt ein Punkt Q so, daß nacheinander $AQ = 5$, 10, 18 mm; man soll die Lage des zu Q harmonisch zugeordneten Punktes R durch Rechnung und Zeichnung bestimmen; ebenso wenn $AQ = -15$, oder wenn $BQ = 4$ ist.

2. Eine Strecke $AB = 30$ mm soll harmonisch geteilt werden im Verhältnis $2:1$ (oder $3:2$ oder $p:q$). In welchem Verhältnis wird dann die Strecke der Teilpunkte durch die Grenzpunkte der ursprünglichen Strecke geteilt?

3. Eine Strecke $AB = a$ (60 mm) soll durch zwei Punkte harmonisch geteilt werden, so daß die Strecke dieser Punkte durch die Grenzpunkte der ersteren Strecke im Verhältnis $5:4$ ($10:3$, $p:q$) geteilt wird.

4. Eine Strecke AB ist durch Q, R harmonisch geteilt im Verhältnis $v = \frac{3}{2}$ (0,25, -2); es ist $AQ = 15$ mm. Wie groß ist QR?

5. Wenn auf einer Geraden von einem Punkt aus nach derselben Richtung hin zwei Punkte um 21 und 28 mm entfernt sind,

in wie vielfacher Weise läßt sich zu den drei Punkten der vierte harmonische Punkt finden? und wo liegt er in jedem der Fälle? [§ 15.]

6. Wenn zu jeder möglichen Zusammenstellung der in der vorhergehenden Aufgabe erhaltenen Punkte selbst wieder jedesmal der vierte harmonische Punkt gesucht wird, wo liegen diese Punkte? — Verallgemeinerung des Ergebnisses.

7. In welchem Verhältnis ist AB durch Q und R harmonisch zu teilen, damit Q in die Mitte von AR fällt?

8. Es gibt zwischen zwei Lichtquellen einen Punkt, der von beiden gleich stark beleuchtet ist und einen ebensolchen Punkt in der Verlängerung der Verbindungsgeraden der Lichtquellen. Es soll aus dem Gesetz, daß die Stärke des Lichtes in umgekehrtem Verhältnis mit dem Quadrat der Entfernung steht, bewiesen werden, daß beide Punkte die Strecke zwischen den Lichtquellen harmonisch teilen.

9. Nach VIII, 20 und 20′ (S. 191) sind folgende Aufgaben mit dem Lineal allein zu lösen: § 16.

a) Durch einen gegebenen Punkt R soll eine Gerade nach dem Schnittpunkt zweier gegebenen Geraden ac gezogen werden, ohne diesen Schnittpunkt selbst zu benützen. — Man wählt durch R (Fig. 184) die beliebigen Strahlen e und f, bestimmt durch diese den Punkt s, zieht durch diese zwei weitere Strahlen b_1, d_1 u. s. f.

b) Von einer gegebenen Geraden r soll der Schnittpunkt mit der Verbindungsgeraden zweier gegebenen Punkte AC bestimmt werden, ohne diese Verbindungsgerade selbst zu benützen. — Man wählt auf r (Fig. 185) die beliebigen Punkte E und F, bestimmt durch diese die Gerade s, wählt auf dieser zwei weitere Punkte B_1, D_1 u. s. f.

10. Es sind vier harmonische Punkte zu zeichnen, wenn einer A gegeben und dazu drei Gerade b, q, r, auf denen die drei andern Punkte liegen sollen. — Andeutung: Die Verbindungsgerade von br mit A sei a; bestimme zu den Strahlen abr den zu r harmonisch zugeordneten Strahl q_1; sein Schnittpunkt mit q gibt Q.

11. Man soll vier harmonische Strahlen zeichnen, wenn einer a gegeben und dazu drei Punkte B, Q, R, durch die die drei andern Strahlen gehen sollen. — Andeutung: Verfahre entsprechend der vorhergehenden Lösung.

12. Auf einer Geraden ist $AM = MC$ gegeben. Durch einen Punkt P soll die Parallele zu AC gezeichnet werden mit Anwendung des Lineals allein.

13. Zwei parallele Gerade sind gegeben. Es soll bloß mit dem Lineal eine Strecke auf einer dieser Geraden a) halbiert werden; b) wiederholt angetragen werden; c) in n gleiche Teile geteilt werden.

14. Bloß mit dem Lineal soll ein Winkel verdoppelt werden, auf dessen einem Schenkel ein senkrechter Scheitelstrahl gegeben ist.

[§ 16.] **15.** Mit dem Lineal allein soll zu einem halbierten Winkel die Halbierende des Nebenwinkels gezeichnet werden.

16. Eine Strecke AB wird von einem Scheitel S aus auf einer parallelen Geraden A_1B_1 abgebildet. Der Schnittpunkt von A_1B mit AB_1 sei auf AB in C abgebildet, der Schnittpunkt von A_1B mit CB_1 in D, der von A_1B mit DB_1 in E u. s. f. Der wievielte Teil von AB ist dann die Strecke von B nach C, D, E u. s. f.?

17. Man soll einen Punkt bestimmen, dessen Abstände von zwei gegebenen Geraden im gegebenen Verhältnis $p:q$ und zugleich von zwei gegebenen Punkten im Verhältnis $r:s$ stehen.

§ 17. **18.** Ein Dreieck ist zu zeichnen, von dem die durch eine Winkelhalbierende auf der Gegenseite gebildeten Abschnitte gegeben sind und dazu noch:

a) ein an dieser Seite anliegender Winkel:
b) die Winkelhalbierende selbst;
c) die Summe der beiden andern Seiten;
d) ihr Unterschied.

Andeutung: Man zeichne über dem Abstand des Teilpunktes und des ihm harmonisch zugeordneten Punktes einen Halbkreis. Denkt man sich c) und d) gelöst und die gegebene Strecke eingetragen, so zeigt sich, daß von dem Bestimmungsdreieck die drei Seiten gegeben sind, da das fragliche Eck desselben mit einem gegebenen Eck eine der Winkelhalbierenden als Mittellinie hat.

19. Mit einem Kreis sei eine der folgenden Figuren gegeben. Man soll die zugehörige Polarfigur zeichnen, wenn gegeben:

a) das eingeschriebene regelmäßige Dreieck, Viereck u. s. w.;
b) ein gleichseitiges Dreieck über einem Durchmesser;
c) ein gleichseitiges Dreieck über einem Halbmesser;
d) ein Dreieck, dessen eine Seite eine Sehne ist, während die andern Seiten Berührende sind;
e) ein Parallelogramm;
f) ein vollständiges Viereck.

Aufgaben zum fünften Kapitel.

X. Zeichnungen, Berechnungen und Lehrsätze.

§ 18. **1.** Q, R seien zwei Teilpunkte einer Strecke AB. Man soll in mm aufzeichnen und das Doppelverhältnis $(ABQR)$ berechnen, wenn in einerlei Richtung gemessen:

a) $AB = 20$ mm, $AQ = 6$, $AR = 16$;
b) $AQ = 12$, $QB = 8$, $BR = 4$;
c) $RA = 6$, $AQ = 7$, $AB = 20$;
d) $QA = 6$, $QB = 24$, $AR = 21$.

2. Auf einer Geraden seien vier Punkte $ABCD$ gegeben, so daß [§ 18.]

$$\alpha)\ AB = 6,\quad BC = 4,\quad CD = -5\ \text{mm},$$
$$\beta)\ AB = -12,\quad BC = 30,\quad CD = -10\ \text{mm}.$$

Es sollen die Doppelverhältnisse berechnet werden, nach denen die Strecken zwischen irgend zweien dieser Punkte durch die beiden andern geteilt werden.

3. Wenn das Doppelverhältnis einer durch zwei Punkte geteilten Strecke Δ ist, so ergibt sich für je drei weitere Strecken dieser Punkte das gleiche Verhältnis; ferner soll für je vier andere nachgewiesen werden, daß das Doppelverhältnis ist:

$$\frac{1}{\Delta},\quad 1-\Delta,\quad \frac{1}{1-\Delta},\quad \frac{\Delta-1}{\Delta},\quad \frac{\Delta}{\Delta-1}.$$

4. Die Lage von drei Punkten ABC sei gegeben und der Wert des Doppelverhältnisses Δ, das durch C und einen weiteren Punkt D auf der Strecke AB gebildet wird, und zwar sei:

$$\alpha)\ AC = 6,\quad AB = 24\ \text{mm und}\ \Delta = \tfrac{1}{6};$$
$$\beta)\ AC = 6,\quad AB = 15,\quad \Delta = -\tfrac{1}{6};$$
$$\gamma)\ AC = -3,\quad AB = 6,\quad \Delta = \tfrac{1}{12};$$
$$\delta)\ AC = -3,\quad AB = 15,\quad \Delta = -\tfrac{1}{12};$$

man soll jedesmal die Lage der gegebenen Punkte in mm aufzeichnen; dann soll die Lage des Punktes D abgeschätzt, ferner durch Zeichnung bestimmt, hierauf berechnet werden.

5. Die Strecke $AB = 30$ mm sei durch zwei Punkte Q und R geteilt. Man soll die Lage dieser Teilpunkte finden, wenn bekannt ist:

$$\alpha)\ QR = 14\ \text{mm},\quad \Delta = (ABQR) = 8;$$
$$\beta)\ QR = 46\ \text{mm},\quad \Delta = \tfrac{1}{24};$$
$$\gamma)\ QR = 24\ \text{mm},\quad \Delta = -\tfrac{1}{9};$$
$$\delta)\ QR = 34\ \text{mm},\quad \Delta = -16;$$
$$\varepsilon)\ AB = a,\quad QR = b,\quad (ABQR) = \Delta.$$

Welche Beziehung muß im Falle ε) zwischen a, b, Δ stattfinden, damit überhaupt reelle Punkte Q und R sich finden lassen?

6. Wenn eine Punktreihe ihr Bild nicht bestrahlt, so können nicht drei Verbindungsgeraden entsprechender Punkte einander in einem Punkt schneiden oder parallel sein.

7. Wenn ein Strahlenbüschel und sein Bild nicht an einer Achse liegen, so können nicht drei Paare entsprechender Strahlen einander auf einer Geraden schneiden oder ihr parallel sein. § 19.

8. Man soll zu Punkten einer Reihe die Bilder auf einer zweiten nicht bestrahlten Reihe bestimmen, wenn zwei Punktpaare AA_1 und BB_1 und zu dem Schnittpunkt C_1 beider Punktreihen das Bild C gegeben ist. — Andeutung: Von den fünf gegebenen Seiten des Brianchonschen Sechs- § 20.

[§ 20.] seits fallen zwei in eine Gerade (AB und CC_1). Nimmt man A als Scheitel des Büschels $a_1 b_1 c_1$, und den Schnitt von AA_1 und BB_1 als Scheitel des Büschels abc, so ist $B_1 C$ Achse derselben.

9. Wie heißt die der Aufgabe 8 entsprechende Aufgabe und deren Lösung für Strahlenbüschel?

10. Man soll zu drei Punkten oder Strahlen und ihren nicht bestrahlten Bildern die Bilder des Schnittpunkts der Träger oder die Verbindungsgeraden der Scheitel finden. — Andeutung: Nach § 20, 2 oder durch die Umkehrung der in vorhergehender Aufgabe gegebenen Folge der Zeichnungen.

11. Es soll zu einer Punktreihe ihr nicht bestrahltes Bild gezeichnet werden, wenn ein Punktpaar AA_1 und die Bilder B und C_1 des gemeinsamen Punktes ($B_1 C$) beider Träger gegeben sind. — Andeutung: BC_1 ist Achse zweier Büschel von A und A_1.

Aufgaben zum sechsten Kapitel.

XI. Lehrsätze und Zeichnungen.

§ 21 u. 22. **1.** Die durch einen Punkt gehenden Eckstrahlen eines Dreiecks schneiden die Seiten des letzteren in drei Ecken eines Dreiecks, dessen Seiten die des ersteren in drei Punkten einer Geraden schneiden.

2. Die Schnittpunkte einer Geraden mit den Seiten eines Dreiseits bestimmen durch ihre Verbindungsgeraden mit den Ecken des letzteren drei Seiten eines Dreiecks, dessen Ecken mit denen des ersteren auf drei Strahlen eines Punktes liegen.

3. Der Abstand des Strahlpunktes von der einen Fluchtgeraden ist gleich dem Abstand der andern Fluchtgeraden von der Achse.

4. Die Abstände eines Punktes von dem Strahlpunkt und von der Fluchtgeraden in seiner Figur verhalten sich wie die Abstände des Strahlpunktes von dem Bild des Punktes und der Fluchtgeraden im Bild. (Vgl. § 25, 9).

5. Der Strahlpunkt S und die Achse a ist gegeben und

a) ein Punkt P mit seinem Bild P_1 | b) eine Gerade g und ihr Bild g_1.

Es wird gesucht:

α) zu einem Punkt Q das Bild Q_1;

β) zu einer Geraden h das Bild h_1;

γ) die Fluchtgerade f zur Figur mit P oder g;

δ) die Fluchtgerade f_1 zur Figur mit P_1 oder g_1.

6. Der Strahlpunkt S, ein Punkt P und sein Bild P_1 und die Fluchtgerade f sind gegeben; es ist die Achse zu zeichnen.

7. Der Strahlpunkt S, die Achse a und die ihr parallele Flucht-

gerade f sind gegeben. Das Bild wird gesucht: a) zu einem Punkt P, [§ 22.] b) zu einer Geraden g, c) zu einem Punkt Q_1, d) zu einer Geraden h_1.

8. Ein Parallelogramm $a_1 b_1 c_1 d_1$ (Fig. 83) ist gegeben, ferner eine Gerade (s), welche die Seiten des Parallelogramms schneidet. Durch einen gegebenen Punkt (A') soll eine Parallele zu dieser Geraden gezogen werden mit Hilfe des Lineals allein. Andeutung: Betrachte die Gerade als Bildachse, den Punkt als Fluchtpunkt zweier Parallelen; nimm das Bild einer Eckenlinie beliebig an u. s. w.

9. Die Punkte und Berührenden eines Kreises liegen paarweise § 23. bestrahlt als Vorlage und Bild

a) zu einem beliebigen Punkt als Strahlpunkt und dessen Polare als Achse.	a') zu einer beliebigen Geraden als Achse und deren Pol als Strahlpunkt.

Liegt der Strahlpunkt im Mittelpunkt, so sind die entsprechenden Teile gegengesetzt; rückt er auf einem Durchmesser in unendliche Entfernung, so liegen die entsprechenden Bogen beiderseits gleich zu dem Durchmesser als Mittellinie, der auf ersterem Durchmesser senkrecht steht.

10. Bei dieser Abbildung eines Kreises in sich selbst halbiert die Fluchtgerade den Abstand zwischen Strahlpunkt und Achse.

11. Die Potenz irgend eines Punktes dieser Fluchtgeraden in bezug auf den Kreis ist entgegengesetzt dem Quadrat seines Abstands vom Strahlpunkt.

12. Die Polaren des inneren und äußeren Ähnlichkeitspunktes von zwei Kreisen haben in dem einen Kreis den gleichen Abstand, wie in dem andern.

13. Der Mittelpunkt eines Kreises, der zwei Kreise rechtwinkelig schneidet, liegt auf der Bildachse (Potenzgeraden) der letzteren.

14. Werden zwei Kreise von zwei andern berührt, so liegt der Ähnlichkeitspunkt des einen Paares auf der Bildachse (Potenzgeraden) des andern Paares und zwar der äußere bei gleichartiger, der innere bei ungleichartiger Berührung.

15. Werden drei Kreise von zwei andern gleichartig berührt, so ist die Bildachse (Potenzgerade) der letzteren äußere Ähnlichkeitsachse der ersteren.

16. Aus den Sätzen von Pascal und Brianchon sollen folgende abgeleitet werden:

a) Die Seiten eines Sehnendreiecks geben mit den jeweils gegenüberliegenden Seiten des zugehörigen berührenden Dreiseits drei Schnittpunkte auf einer Geraden.	a') Die Ecken eines berührenden Dreiseits geben mit den jeweils gegenüberliegenden Ecken des zugehörigen Sehnendreiecks drei Verbindungsgerade durch einen Punkt.
b) Verbindet man die Berührungspunkte zweier Geraden je mit zwei	b') Schneidet man zwei Berührende durch irgend zwei weitere Berüh-

[§ 23.] Punkten des Umfangs, so schneiden einander diese Verbindungsgeraden in zwei weiteren Punkten eines Strahles des Schnittpunktes der Berührenden.

c) Je zwei Nebenecken eines Sehnenvierecks liegen auf einer Nebenseite des zugehörigen berührenden Vierseits (vier Punkte auf einer Geraden).

d) Verbindet man die Berührungspunkte zweier Geraden je mit einem weiteren Punkt des Umfangs, so schneiden diese Verbindungsgeraden die Berührenden in zwei Punkten einer Geraden, die durch den Schnittpunkt der Berührungssehne und der Verbindungsgeraden beider Punkte geht (sechs Gerade durch diesen Schnittpunkt).

rende, so gehen die beiden Verbindungsgeraden dieser Schnittpunkte durch einen Punkt der Berührungssehne der beiden ersteren Berührenden.

c′) Je zwei Nebenseiten eines berührenden Vierseits schneiden einander in einem Nebeneck des zugehörigen Sehnenvierecks (vier Gerade durch einen Punkt).

d′) Schneidet man ein Paar von Berührenden je mit einer weiteren Berührenden, so gehen die Geraden, welche die Berührungspunkte des ersteren Paares mit diesen Schnittpunkten verbinden, durch einen Punkt der Geraden, welche die Scheitel beider Paare von Berührenden verbindet (sechs Punkte auf dieser Geraden).

§ 24. **17.** Auf einem quadratischen Blatt von 150 mm Seite sind die Mittelpunkte K_1, K_2, K_3 dreier Kreise von der einen Seite des Blattes um 31, 50, 98 mm, von der anstoßenden um 47, 79, 62 mm entfernt anzunehmen, ihre Halbmesser zu 18,5, 10,5, 29 mm. Die acht berührenden Kreise sollen gezeichnet werden.

18. Ein berührender Kreis ist in eine Fläche zu zeichnen, die begrenzt ist

a) von drei Kreisbögen;

b) von zwei Kreisbögen und einer Geraden (Spitzbogen; vgl. Aufgabe IV, 15);

c) von einem Kreisbogen und zwei Geraden.

§ 25. Aufgaben über Kegelschnitte folgen im dritten Teil.

Aufgaben zur zweiten Abteilung.

Aufgaben zum siebenten Kapitel.

XII. Lehrsätze.

1. Dreiecke mit gemeinsamer Grundseite verhalten sich wie die Strecken, die auf der Verbindungsgeraden ihrer Spitzen durch die Grundseite gebildet werden. § 26.

2. Der eine der Sätze in § 26, 3a sei bewiesen; man soll daraus den andern folgern. — Andeutung: Verwandle beide Dreiecke mit derselben Grundseite in rechtwinkelige und lege sie mit der Grundseite aufeinander.

3. Beweise den Satz von Ceva (§ 14, 4) durch Vergleichung von Dreiecksinhalten. — Andeutung: Wende XII, 1 auf je zwei Dreiecke an, die durch je zwei Ecken des gegebenen Dreiecks und den Schnittpunkt der Schnittgeraden bestimmt sind.

4. Was folgt aus § 26, 4 für die Lage der Gegenseiten des gemeinsamen Winkels zweier Dreiecke, die gleichen Inhalt haben?

5. Beweise, daß der Satz in § 26, 4 auch für Dreiecke gilt, in denen zwei Winkel einander zu $2R$ ergänzen.

6. Die Formel für den Inhalt eines Trapezes (§ 26, 6e) soll gefunden werden unter Benützung a) der Mittellinie, b) einer Eckenlinie, c) einer Hilfslinie, die von einem Eck aus parallel zu einer der nicht parallelen Seiten gezogen wird.

7. Der Inhalt eines Vierecks, dessen Eckenlinien zueinander senkrecht sind, ergibt sich, wenn man die eine Eckenlinie mit der Hälfte der andern vervielfacht. — Andeutung: Berechne die Teildreiecke oder benütze das umbeschriebene Parallelogramm, dessen Seiten den Eckenlinien parallel sind.

Zusatz. Wie ändert sich der Satz, wenn die Eckenlinien einen Winkel $= \frac{1}{3}R$ oder $\frac{1}{2}R$ oder $\frac{2}{3}R$ bilden?

8. Von den beiden in ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck beschriebenen Quadraten ist das an der Hypotenuse anstehende $\frac{1}{9}$ und das im rechten Winkel $\frac{1}{8}$ des Quadrates der Hypotenuse. § 27.

9. Die Seite des in ein gleichseitiges Dreieck beschriebenen Quadrates ist gleich dem Überschuß der vierfachen Höhe des Dreiecks über den Umfang.

10. a) Die Fußpunkte der Senkrechten von einem Punkt auf die Seiten eines Dreiecks teilen diese so, daß die Summe der Quadrate von drei nicht aneinander angrenzenden Abschnitten gleich ist der

[§ 27.] Summe der Quadrate der übrigen. b) Umgekehrt: Die Senkrechten, die die Seiten in solche Abschnitte teilen, gehen durch einen Punkt.

11. Welchen Wert nimmt a^2 im allgemeinen pythagoreischen Satz an, wenn α) $\sphericalangle\, bc = \frac{2}{3}R$? β) $\sphericalangle\, bc = \frac{4}{3}R$? γ) wenn $a = c$ ist?

12. In einem Dreieck sei $\sphericalangle\, ab = 2 \cdot \sphericalangle\, ac$; dann ist: $c^2 - b^2 = ab$. Andeutung: Setze in § 27, 4b für w_3 den Wert von p; oder verlängere BC um b, so wird AC gewendet parallel AB.

13. In einem Parallelogramm mit den Seiten a und b und den Eckenlinien e und f ist $2(a^2 + b^2) = e^2 + f^2$ (Anwendung von § 27, 4a).

14. Im Viereck mit den Seiten $abcd$ und den Eckenlinien e und f, deren Mitten den Abstand s haben, ist $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4s^2$ (Satz von Euler). — Wende die Formel § 27, 4a auf die beiden an einer Eckenlinie anliegenden Dreiecke an und dann auch auf das Dreieck, dessen Seiten die so berechneten Schwerlinien und die andre Eckenlinie sind.

15. Schneiden einander zwei Sehnen rechtwinkelig, so ist die Summe der Quadrate ihrer Abschnitte gleich dem Quadrat des Durchmessers.

16. Der Flächeninhalt eines Kreisvierecks wird erhalten, wenn man die Summe der beiden Produkte aus je zwei einerseits einer Eckenlinie liegenden Seiten vervielfacht mit dieser Eckenlinie und das Ergebnis durch den doppelten Kreisdurchmesser teilt.

17. Der Flächeninhalt eines Vierecks, in und um welches ein Kreis beschrieben werden kann, ist gleich der Quadratwurzel aus dem Produkt seiner Seiten (Anwendung von § 27, 8 und I. Teil § 39, 2').

18. Es soll bewiesen werden, daß in jedem Dreieck:

a) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3},$$

und entsprechend für ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3; ferner daß:

b) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3};$$

c) $$\frac{2}{h_1} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3}$$

und entsprechend für $\frac{2}{h_2}$ und $\frac{2}{h_3}$;

d) $$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho = 4r.$$

e) $$J = \sqrt{\varrho \cdot \varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3}.$$

XIII. Zeichnungen und Berechnungen.

§ 26. **1.** Ein Dreieck soll durch Strahlen eines Eckes in drei Teile geteilt werden, die sich wie $2 : 3 : 4$ verhalten.

[§ 26.]

2. Ein Dreieck soll gezeichnet werden, das einem gegebenen ähnlich und $n$mal (zwei, dreimal) so groß ist als dieses.

3. Ein Dreieck ABC soll in ein inhaltsgleiches verwandelt werden, das einem gegebenem δ ähnlich ist. — Andeutung: Ziehe über AB ein $\triangle\, \varepsilon \backsim \delta$ und verwandle ABC so, daß es mit ε die Winkel an AB gemeinsam hat.

4. Man soll ein Dreieck unter Beibehaltung eines Winkels so verwandeln, daß a) die ihn einschließenden Seiten nun gleich werden; b) die Gegenseite des Winkels einer gegebenen Geraden l parallel wird. — Andeutung zu b): Ziehe durch ein Eck die Parallele zu l.

5. Ein Dreieck habe die Seiten $a = 25$, $b = 29$, $c = 36$, und parallel zu c sei im Dreieck eine Strecke $c' = 12$ (oder 8 oder 26) gezogen. Der wievielte Teil des Dreiecks wird durch c' abgeschnitten?

6. Ein dem Dreieck abc in voriger Nummer ähnliches Dreieck habe den Inhalt $= 90$ (oder 160 oder 705,6). Wie groß sind dessen Seiten, wenn der Inhalt von $abc = 360$ ist?

7. Zwei Dreiecke d und δ haben einen Winkel gleich, und die zwei denselben einschließenden Seiten seien bei d gleich 21 und 20, bei δ aber in Summe $= 71$ (Unterschied $= 31$); der Inhalt von d sei $= 126$, der von $\delta = 306$. Wie groß sind in δ die den betreffenden Winkel einschließenden Seiten? (Quadratische Gleichung.)

8. Das Dreieck d in voriger Nummer soll durch eine Parallele zur dritten nicht angegebenen Seite in zwei (oder drei) gleiche Teile geteilt werden; wie groß werden die Seitenabschnitte?

---

9. Welchen Inhalt hat ein Rechteck, dessen Seiten sind a) 19 und 21? b) $8\frac{3}{4}$ und $6\frac{2}{5}$? c) 17,2 und 9,5?

10. Seite und Eckenlinie eines Rechteckes seien a) 9 und 41; b) 6,6 und 13; c) $2\frac{1}{2}$ und $3\frac{5}{8}$. Wie groß ist sein Inhalt?

11. Der Umfang eines Rechteckes sei $= 52$, seine Grundseite sei dreimal so groß als seine Höhe. Welchen Inhalt hat es?

12. Wie groß ist der Inhalt eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen a) Katheten sind $= 34{,}5$ und 8,2; b) Hypotenuse $= 8{,}9$ und Kathete $= 8$?

13. Von zwei inhaltsgleichen Rechtecken ist das eine 117 m lang und 35 m breit, das andere 65 m lang; wie breit ist dieses?

14. Welchen Inhalt hat eine Raute, deren Eckenlinien $= 90$ und 56 sind?

15. Die Parallelseiten eines Trapezes seien $= 24$ und 11, ihr Abstand $= 8{,}8$ (oder $39\frac{3}{4}$, 16,45 und $32\frac{1}{5}$); welchen Inhalt hat es?

16. Wie groß ist die eine Parallelseite eines Trapezes, wenn die

[§ 26.] andere $= 17$ cm, wenn der Abstand beider $= 15$ cm und der Inhalt $= 210$ qcm ist?

17. Höhe und Parallelseiten eines Trapezes verhalten sich wie $2:3:5$, der Inhalt ist $= 512$; wie groß sind die Parallelseiten selbst?

§ 27. **18.** Man soll den Inhalt eines Dreiecks finden, dessen Seiten sind: α) 10, 17, 21; β) 25, 29, 36; γ) 56, 25, 39; δ) 33, 25, 52.

19. Von einem viereckigen Feld $ABCD$ ist die Seite $AB = 13$ m, $BC = 40$ m, $CD = 15$ m, $DA = 44$ m und die Eckenlinie $AC = 37$ m. Wie viel Ar umfaßt das Feld?

20. Der Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks sei $= 100$ qm; wie groß ist dessen Seite?

21. Wenn die römischen Feldmesser den Inhalt des gleichseitigen Dreiecks $= \frac{1}{2}a^2$ rechneten (wobei a die Seite), welchen Fehler machten sie hierbei? oder welchen Fehler begeht man, wenn man (nach Heron) jenen Inhalt $= \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{10}a^2$ setzt?

22. Der Inhalt eines Dreiecks soll durch die drei Höhen ausgedrückt werden. — Andeutung: Setze in die heronische Formel $a = \frac{2J}{h_1}$ usw.

23. Man soll den Inhalt eines Trapezes durch seine vier Seiten ausdrücken. — Andeutung: Ziehe durch ein Eck die Parallele zu einer der nicht parallelen Seiten und berechne die Höhe des hierdurch abgeschnittenen Dreiecks.

24. Die vier Seiten a, b, c, d eines Kreisvierecks seien bekannt (z. B. $a = 104$, $b = 56$, $c = 49$, $d = 39$). Man soll

a) eine Eckenlinie berechnen,

b) den Halbmesser des umbeschriebenen Kreises berechnen.

25. Welchen Inhalt hat ein Sehnenviereck, dessen Seiten sind: α) 3, 7, 9, 11; β) 68, 55, 43, 14; γ) 80, 91, 195, 300.

XIV. Zeichnung nach Rechnungsausdrücken.

§ 28. Wenn a, b, c, ... beliebige Strecken, p und q aber beliebige Zahlen bedeuten, so sollen die Werte der folgenden Ausdrücke als Strecken dargestellt werden:

1. a) $\frac{a \cdot c}{a - b}$; b) $\frac{a \cdot c}{-a + b + c}$; c) $\frac{a \cdot c + b \cdot d}{f}$; d) $\frac{a \cdot c + b \cdot c}{f}$;

e) $\frac{a^2 + b \cdot c}{f}$; f) $\frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot f}$; g) $\frac{a \cdot b^2 \cdot c}{d \cdot e \cdot f}$; h) $\frac{p}{q} \cdot \frac{2ab - c^2}{2b + c}$.

2. a) $\frac{a \cdot b \cdot c}{a^2 + b \cdot c}$ $\left(\text{z. B. als} = \frac{a \cdot b}{\frac{a^2}{c} + b} \text{ oder} = \frac{b \cdot c}{a + \frac{b \cdot c}{a}} \text{ oder} = a - \frac{a^2}{a + \frac{b \cdot c}{a}}\right)$;

b) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot c$ $\left(\text{z. B. als} = \frac{u^2}{v^2} \cdot c = \frac{u \cdot c}{v} \cdot \frac{u}{v} = m \cdot \frac{u}{v}\right)$;

[§ 28.]

c) $\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$ $\left(\text{z. B.} = \frac{a^2+\frac{b^3}{a}}{a+\frac{b^2}{a}} \text{ oder } = \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2+b^2}\right)$;

3. a) $\frac{a^4-a^2b^2+ab^3}{a^3+b^3}$ $\left(\text{z. B.} = \frac{a^2-b^2+\frac{b^3}{a}}{a+\frac{b^3}{a^2}}\right)$; c) $\frac{a^3-b^2c}{a^2+b^2}$;

b) $\frac{a^2+b^2-c^2}{2c}$ (vgl. die Ableitung in § 27, 3); d) $\frac{a^3+ab^2+a^2b+b^3}{a^2-b^2}$.

4. a) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$; b) $\sqrt{\frac{p}{q}\cdot a^2}$ (z. B. für $p=5$ und $q=4$);

c) $\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b^2}$; d) $\sqrt{ab\pm cd} = \sqrt{a\left(b\pm\frac{cd}{a}\right)}$; e) $\sqrt{a^2+bc}$.

(Warum ist der letzte Ausdruck die Eckenlinie eines gleichschenkeligen Trapezes, dessen Schenkel a und dessen Parallelseiten b und c sind?);

f) $\sqrt{a^2+b^2+ab}$ (vgl. Aufg. XII, 11 β);

g) $\sqrt{a^2+b^2-ab}$ (vgl. Aufg XII, 12); h) $\sqrt{a^2+b^2\mp 2ac}$ (vgl. § 27, 2);

5. a) $a\cdot\sqrt{5}$ (Beachte, daß $5=5\cdot 1=2^2+1=3^2-2^2$);

b) $\sqrt{a^2+a^2\sqrt{2}}$; c) $a\sqrt{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; d) $a\cdot\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$;

e) $\frac{a}{2}\sqrt{3}-\frac{a}{2}$ f) $\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$ g) $\frac{a}{4}\pm\sqrt{\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{2}}$;

h) $\sqrt{a^4+a^2b^2}$ $\left(\text{z B.} = \sqrt{a\cdot\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

i) $\sqrt{\frac{a^4}{b^2}-\frac{2a^2c}{b}}$; k) $\frac{a\cdot b}{\sqrt{a^2\pm\frac{b^2}{4}}}$; l) $\frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}$;

6. Ebenso, wenn x, y, z in den folgenden Gleichungen die Unbekannten bedeuten:

a) $\left\{\begin{array}{l} x+y=a \\ x-y=\frac{b\cdot c}{a}\end{array}\right\}$; b) $\left\{\begin{array}{l} x+y=\frac{a+b+c}{2} \\ x\cdot y=\frac{b\cdot c}{2}\end{array}\right\}$;

c) $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{(a+b)\cdot c}{2y}-b \\ y=\frac{(x-b)\cdot c}{a-b}\end{array}\right\}$; d) $\left\{\begin{array}{l} x\cdot y=a\cdot b \\ y=\sqrt{\frac{4x^2}{3}}\end{array}\right\}$; e) $\left\{\begin{array}{l} y+z=a-x \\ y\cdot z=b\cdot x \\ y^2+z^2=x^2\end{array}\right\}$.

Gleichungen mit einer Unbekannten.

§ 29. **7.** Man soll parallel mit den Seiten eines Rechteckes und in gleichen Abständen von ihnen Gerade ziehen, sodaß das entstehende Rechteck einen gegebenen Umfang hat (z. B.: $s_1 = 28, s_2 = 16, u = 48$ (112) mm).

8. Von einem Punkt auf dem Schenkel eines Winkels aus soll nach dem andern Schenkel eine Gerade so gezogen werden, daß das abgeschnittene Dreieck inhaltsgleich einem gegebenen Quadrat wird.

9. Wie muß eine Gerade parallel zu einer Rechteckseite gezogen werden, a) damit der Umfang des abgeschnittenen Rechtecks halb so groß als der des gegebenen wird? b) damit das abgeschnittene Rechteck dem gegebenen ähnlich wird? c) damit die Eckenlinie des Rechtecks im Verhältnis seiner Seiten geteilt wird?

10. Ein Rechteck soll in ein rechtwinkeliges Dreieck mit gegebener Hypotenuse verwandelt werden.

11. Man soll eine Strecke a so um x verlängern, daß das Rechteck aus a und $(a + x)$ gleich einem gegebenen Quadrat wird.

12. Auf einer Strecke liegt eine zweite. Wo muß der Punkt liegen, welcher beide Strecken in demselben Verhältnis teilt?

Gleichungen mit zwei Unbekannten.

13. In einem Dreieck soll ein Eckstrahl so gezogen werden, daß beide Teildreiecke denselben Umfang haben.

14. In einem stumpfwinkeligen gleichschenkeligen Dreieck soll eine Parallele zur Grundseite so gezogen werden, daß sie das geometrische Mittel zwischen dem Schenkel und seinem oberen Abschnitt wird.

15. Ein Rechteck zu zeichnen, das mit dem einen von zwei gegebenen Rechtecken gleichen Umfang, mit dem andern gleichen Inhalt hat.

16. In einem gleichseitigen Dreieck soll zur einen Seite eine Senkrechte so gezogen werden, daß ihr Quadrat gleich dem Rechteck der Abschnitte ist, in welche a) die zweite Seite, b) die verlängerte dritte Seite durch die Senkrechte geteilt wird.

17. In einem Dreieck ABC soll parallel zu $BC = a$ eine Gerade QR so gezogen werden, daß:
a) $AQ = RC$; b) $QR = RC$; c) $QR^2 = AQ \cdot AB$;
d) $QB + RC = p$; e) $AQ + AR = \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$;
f) $QB \pm RC = p$ (besonders auch $= QR$); g) $AQ \pm RC = QR$;
h) $RC - AQ = QR$; i) $AQ - QB = \pm QR$; k) $AQ \pm RC = p$;
l) $QR \pm BC = AQ \pm AR$; m) der Umfang des abgeschnittenen Trapezes eine gegebene Größe $2p$ habe.

18. Man soll ein gleichschenkeliges Trapez zeichnen aus den beiden Parallelseiten und aus der Summe von Eckenlinie und Schenkel. Andeutung: Benütze den ptolemäischen Satz.

Rein quadratische Gleichungen.

19. Ein Dreieck soll in ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck verwandelt werden. [§ 29.]

20. Welche Beziehung muß zwischen den Seiten eines rechteckigen Stückes Papier stattfinden, damit dasselbe beim Halbieren und Wiederhalbieren stets ein dem ganzen ähnliches Rechteck gibt? Wie zeichnet man eine Seite, wenn die andere gegeben ist?

21. In einem Trapez soll zu den Parallelseiten eine Parallele so gezogen werden, daß sie das geometrische Mittel zwischen jenen Seiten ist.

22. Man soll ein gleichseitiges Dreieck als geometrisches Mittel zwischen zwei gegebenen gleichseitigen Dreiecken finden.

23. Durch einen Punkt im Inneren eines Kreises soll eine Sehne so gezogen werden, daß sie durch jenen Punkt im Verhältnis $1:2$ geteilt wird.

24. Es ist ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, dessen Inhalt $= f^2$ gegeben ist (z. B.: $f^2 = 249{,}41$ qmm).

25. Man soll in einen Halbkreis ein Quadrat so einbeschreiben, daß zwei Ecken auf dessen Durchmesser, zwei auf dem Bogen liegen. (Vgl. Aufgabe VII, 16.)

26. Von einem außerhalb eines Kreises gegebenen Punkt aus soll eine Schnittgerade so gezogen werden, daß deren äußerer Abschnitt zum inneren sich verhalte a) wie $1:1$; b) wie zwei gegebene Strecken a und b.

27. Man soll die Fläche eines Trapezes, dessen Höhe $= h$ ist, durch eine Parallele zu den Parallelseiten a und b halbieren. — Andeutung: Man drücke die Verhältnisse der Höhen der beiden Teiltrapeze auf doppelte Weise in a, b und h aus.

28. Es soll a) ein gleichseitiges Dreieck oder b) ein regelmäßiges Sechseck als geometrisches Mittel zwischen zwei gegebenen Quadraten (Rechtecken) gezeichnet werden.

Gemischt quadratische Gleichungen.

29. Man soll ein rechtwinkeliges Dreieck zeichnen, dessen drei Seiten zwei gleiche Unterschiede geben, wenn die kleinste Seite $= a$ gegeben ist (z. B.: $a = 21$ mm).

30. Man soll ein gleichschenkeliges Trapez zeichnen, in dem die Eckenlinien zu den nicht parallelen Seiten senkrecht sind, wenn diese beiden $= a$ und die kleinere der Parallelseiten $= b$ gegeben sind.

31. In ein Quadrat soll ein gleichseitiges Dreieck so eingeschrieben werden, daß beide Figuren ein Eck gemeinsam haben. — Andeutung: Beachte, daß die Gegenseite des gemeinsamen Eckes

[§ 29.] parallel der Eckenlinie ist und bestimme den durch sie auf der Quadratseite gebildeten Abschnitt.

32. Eine Strecke a soll in einem Punkt so geteilt werden, daß das Quadrat des einen Abschnittes das Dreifache des Quadrates des andern Abschnittes ist.

33. Zwei Strecken a und b sind so zu legen, daß die Grenzpunkte der einen die andere Strecke harmonisch teilen. — Andeutung: Man betrachte den Abstand des einen Grenzpunktes von der Mitte der andern Strecke als Unbekannte.

34. Von vier harmonischen Punkten sind die beiden äußersten gegeben. Die inneren sind so zu bestimmen, daß sie gleiche Abstände von den äußeren haben.

35. Die Strecken a und b zwischen den zugeordneten Punkten zweier harmonischen Punktpaare sind gegeben. Es ist die gegenseitige Lage dieser Punkte zu bestimmen.

36. Es sind zwei Strecken AB und A_1B_1 einer Geraden durch ein Punktpaar XY harmonisch zu teilen. — Andeutung: Lege um AB und A_1B_1 Kreise, die einander schneiden; die Gerade durch die Schnittpunkte gibt die Mitte von XY.

Aufgaben zum achten Kapitel.

XV. Berechnungen und Lehrsätze.

§ 30. **1.** Der Durchmesser eines Kreises sei 100 mm. Bestimme durch Messen und Rechnen die Seiten s_4, s_6, s_{10} und deren Abstände x_4, x_6, x_{10} vom Mittelpunkt.

2. Berechne s_8 unmittelbar aus der Figur.

3. Finde durch Messen und Rechnen die Seiten s_3, s_5 in einem Kreis, dessen Halbmesser $= 30$ mm ist.

4. Die Seite des einem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen Vielecks sei $= 8$. Wie groß ist der Halbmesser des Kreises, wenn jene Seite angehört einem a) Sechseck? b) Viereck? c) Dreieck? d) Zehneck? e) Achteck?

5. Berechne aus der Seite a) des regelmäßigen Achtecks die des Vierecks, b) des regelmäßigen Zwölfecks die des Sechsecks im gleichen Kreis, und zwar zuerst ohne und dann mit Benützung der Formel in § 30, 4.

6. a) Wie groß ist die Eckenlinie eines regelmäßigen Fünfecks, im Halbmesser r des Umkreises ausgedrückt?

b) Beweise, daß je zwei nicht vom selben Eck ausgehende Eckenlinien einander so schneiden, daß der größere Abschnitt gleich der Fünfeckseite ist, und daß es der goldene Schnitt der Eckenlinie ist.

c) Beweise wie in § 1, 5, daß Seite und Eckenlinie eines regelmäßigen Fünfecks kein gemeinsames Maß haben. — Andeutung: Nach b) erhält man eine unbeschränkte Zahl einander ähnlicher gleichschenkeliger Dreiecke, wenn man vom Schnitt beider Eckenlinien eine Parallele zu einer Seite bis zur andern Seite zieht, von da eine Parallele zur Eckenlinie bis zur andern usw. [§ 30.]

7. Berechne die Seite des regelmäßigen Sternfünfecks, wenn dieses einem Kreis einbeschrieben wird, dessen einbeschriebenes regelmäßiges Dreieck die Seitenlänge $\sqrt{3}$ hat.

8. a) Wird in Fig. 130 (S. 112) von C aus mit CA als Halbmesser der Kreis beschrieben und AF bis zum Kreis verlängert, bis D, so ist BD die Seite des regelmäßigen Fünfecks, und DF ist gleich dem Halbmesser.

b) Aus a) folgere den Beweis des Satzes: Wird in einem Kreis ein Trapez gezeichnet, dessen Parallelseiten der Durchmesser und s_{10} sind, so sind die nicht parallelen Seiten $= s_5$, und die Eckenlinie ist $= s_{10} + r$.

c) Wende auf das Trapez in b) den ptolemäischen Satz an; zu welcher Folgerung führt er?

d) Beweise, daß $s_5^2 = s_{10}^2 + r^2$, durch Anwendung des allgemeinen pythagoreischen Lehrsatzes auf das $\triangle\, CBD$ oder FBD (in a).

9. Welchen Wert hat die Summe der Quadrate a) zweier ungleichen, b) aller drei von einem Eck ausgehenden Eckenlinien eines regelmäßigen Sechsecks? c) Anwendung zum Zeichnen von $r\sqrt{7}$ und $r\sqrt{10}$.

10. a) Welches Verhältnis haben die drei ungleichen Eckenlinien eines regelmäßigen Achtecks?

b) Wie groß ist die Summe der Seiten eines regelmäßigen Sternachtecks in einem Kreis vom Halbmesser = 10,18?

11. Berechne a) die Seiten, b) die Eckenlinien eines regelmäßigen Zwölfecks, wenn der Halbmesser 125 mm; ebenso ihre Abstände vom Mittelpunkt.

12. Von einem Achteck (Zwölfeck), dessen Seite = 41,43 (53,59) ist, soll die Eckenlinie berechnet werden, die 3 (5) Seiten überspannt.

13. a) Man soll die Seiten und Eckenlinien eines regelmäßigen Fünfzehnecks durch den Halbmesser r seines Umkreises ausdrücken und berechnen für $r = 1{,}25$ m.

b) Umgekehrt ist r zu berechnen, wenn s_{15} gegeben ist (z. B. $s_{15} = 62{,}37$ cm).

14. Löse die Aufgaben XV, 1, 2, 3, 4 auch für umbeschriebene Vielecke.

15. Weise nach, daß:

[§ 30.] a) $t_n = \dfrac{s_n}{\sqrt{1-\left(\frac{s_n}{2r}\right)^2}}$, b) $s_n = \dfrac{t_n}{\sqrt{1+\left(\frac{t_n}{2r}\right)^2}}$,

c) $s_{2n} = \sqrt{\dfrac{s_n \cdot t_{2n}}{2}}$, oder (Fig. 136) $CU : AC = AC : AB$,

d) $\dfrac{1}{t_{2n}} = \dfrac{1}{s_n} + \dfrac{1}{t_n}$, oder (Fig. 136) $UV : AB = LU : LA$.

16. Wende die Formel in § 30, 10 (S. 116) an zur Berechnung von a) t_6; b) t_8; c) t_{12}.

§ 31. **17.** Der Umfang eines einem Kreis einbeschriebenen Quadrates sei $= 40$; wie groß ist der Umfang des zugehörigen a) Sechsecks? b) Dreiecks? c) Achtecks? d) Zwölfecks?

18. Der Umfang eines regelmäßigen Sechsecks sei $= 48$. Wie groß ist der zugehörige a) große, b) der kleine Halbmesser? c) Wie groß sind die Halbmesser für ein Zwölfeck von gleichem Umfang?

19. Der Umfang eines einbeschriebenen regelmäßigen $2n$-ecks ist das geometrische Mittel zwischen den Umfängen des einbeschriebenen n-ecks und des umbeschriebenen $2n$-ecks.

20. a) Der Umfang eines umbeschriebenen regelmäßigen $2n$-ecks ist das harmonische Mittel zwischen den Umfängen des um- und einbeschriebenen n-ecks, also $\dfrac{1}{u_{2n}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{e_n} + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

b) Wenn $e_{60} = 3{,}140d$ und $u_{60} = 3{,}144d$, wie groß ist u_{120}? (Auf drei Bruchstellen.)

21. Welchen Weg durchläuft täglich das Ende a) des Minutenzeigers, b) des Sekundenzeigers einer Uhr, wenn jener 14 cm, dieser 24,5 mm lang ist?

22. Wie lange braucht ein Rennpferd, das 12,6 m in der Sekunde macht, um eine Kreisbahn zu durchlaufen, deren Durchmesser 112 m beträgt?

23. a) Der Durchmesser d eines Halbkreises sei in zwei beliebige Teile geteilt, und über diesen als Durchmessern seien wieder Halbkreise beschrieben. Wie groß ist deren gesamte Bogenlänge?

b) Wenn aber der Durchmesser in beliebig viele gleiche Teile geteilt und wie in a) verfahren wird, wie groß ist die Summe der Halbkreislängen?

24. Auf dem Durchmesser $2r$ eines Kreises werde ein Punkt P so gewählt, daß der eine Teil $= \dfrac{r}{5}$ $\left(\text{oder } = r \quad \text{oder} \quad = \dfrac{r}{13}\right)$ sei, und in P werde die senkrechte Sehne gezogen. Wenn nun um jeden der entstehenden vier Sehnenabschnitte als Durchmesser ein Kreis beschrieben wird, welche Summe geben deren Umfänge?

25. a) Wie groß ist der Erdhalbmesser, wenn der Umfang zu

40000 km angenommen wird? b) Wenn man wie üblich den Halbmesser des Erdäquators zu 860 und seinen Umfang zu 5400 geogr. Meilen annimmt, stimmen diese Zahlen zusammen? [§ 31.]

26. Wie groß muß der Halbmesser eines Kreises genommen werden, damit die Sekundenbögen seines Umfangs 1 mm groß sind?

27. Die Geradstreckung einer Kreislinie läßt sich annähernd so durchführen, daß man den Durchmesser AB in fünf gleiche Teile teilt, als Verlängerung in B einen solchen Teil anfügt $= BC$, dann auf der von A ausgehenden Berührenden drei solche Teile abträgt $= AD$; dann hat das Dreieck ACD nahezu den gleichen Umfang wie die Kreislinie. — Ist diese Annäherung genauer als die von Kochansky (§ 31,4)?

28. Nicolaus von Cusa (1464) löst die Aufgabe, zu einem Kreis ein gleichseitiges Dreieck von gleichem Umfang zu zeichnen, indem er ein Quadrat in den Kreis beschreibt, um die Summe des Halbmessers und der Quadratseite als Durchmesser einen Kreis und in diesen das gleichseitige Dreieck zeichnet. Welchen Wert würde π hiernach haben?

§ 32.

29. Über der Seite a sei ein regelmäßiges a) Viereck, b) Sechseck, c) Achteck, d) Zwölfeck, e) Fünfeck gezeichnet; man soll den Inhalt berechnen (auf drei Bruchstellen).

30. Ein regelmäßiges Dreieck und ein regelmäßiges Sechseck haben den gleichen Umfang u; in welchem Verhältnis stehen ihre Inhalte? Zu lösen a) mit, b) ohne Berechnung der Inhalte selbst.

31. Ein regelmäßiges Achteck und ein regelmäßiges Zwölfeck haben a) gleichen Umfang, b) gleichen Inhalt; in welchem Verhältnis stehen ihre α) Inhalte? β) Umfänge?

32. a) Welchen Inhalt hat ein regelmäßiges Fünfeck, das einem Kreis vom Halbmesser 8 einbeschrieben ist? — b) In welche Teile teilt eine Eckenlinie das Fünfeck?

33. Welche Beziehung findet statt zwischen den Inhalten eines regelmäßigen a) ein- und umbeschriebenen Vierecks? b) Dreiecks? c) einbeschriebenen Drei- und Sechsecks? d) einbeschriebenen Sechs- und umbeschriebenen Dreiecks? [Folgerung aus c) und d)?]

34. Welche Aufgaben lassen sich mittels der Kreisformeln in § 31,3 und § 32,2 stellen? Diese Aufgaben zu lösen. — Beispiel: $r = 4{,}2$; $u = 26{,}39$; $J = 55{,}12$ (oder 40,5; 254,5).

35. Von einem Kreis sei der Halbmesser $= r$ (oder der Umfang $= u$) gegeben; wie groß ist die Seite a) eines Quadrates, b) eines regelmäßigen Dreiecks, welches mit dem Kreis gleichen Inhalt hat? — Beispiel: $r = 7$ (oder $u = 100$).

36. a) Welche Inhaltssumme haben die in Aufg. 24 entstandenen vier Kreise? b) Auch für den Fall zu lösen, daß der Teilpunkt P den Durchmesser im Verhältnis von $q : s$ teilt.

[§ 32.] **37.** In ein regelmäßiges Dreieck seien drei Kreise beschrieben, die einander und die Dreiecksseiten berühren. Welchen Bruchteil des Inhalts a) des Dreiecks, b) des Dreieckinkreises, c) des Dreieckumkreises bedecken die drei ersten Kreise?

38. Wie zeichnet man einen Kreis, dessen a) Umfang, b) Inhalt gleich der Summe (dem Unterschied) der Umfänge (Inhalte) zweier gegebenen Kreise ist? c) In welchem Verhältnis stehen die Inhalte der gefundenen Kreise zueinander?

39. Um ein Quadrat in einen inhaltsgleichen Kreis zu verwandeln, trugen indische Mathematiker vom Mittelpunkt des Quadrats die halbe Eckenlinie auf die Parallele zur Seite auf, teilten den Überschuß der halben Eckenlinie über die halbe Seite in drei gleiche Teile und beschrieben vom Mittelpunkt den Kreis durch den nächsten Teilpunkt. Welchen Wert hätte hiernach π?

40. Nach Albrecht Dürer (1525) ist die Aufgabe 39 annähernd dadurch zu lösen, daß man die Eckenlinie in zehn gleiche Teile zerlegt und 8 als Durchmesser nimmt. Es ist nachzuweisen, daß diese Bestimmung auf den Wert $\pi = 3\frac{1}{8}$ führt (der bei Vitruvius vorkommt).

§ 33. **41.** Welchen Weg beschreibt in jeder Sekunde ein Punkt des Erdäquators infolge der steten Umdrehung der Erde? (Erdhalbmesser = 6370 km.) — Wie groß ist der Weg im Verlauf eines Tages?

42. Welchen Weg legt in einer Sekunde die Erde in ihrer Bahn um die Sonne zurück, wenn ihre Bewegung als eine kreis- und gleichförmige angesehen wird? (Der Abstand der Erde vom Mittelpunkt der Bahn beträgt 150 Millionen Kilometer, das Jahr hat $365\frac{1}{4}$ Tage). — Wie groß ist der Weg während eines Tages?

43. Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises (Mauer-Quadranten), dessen Bogen a) zu 1^0 genau 1 dm lang ist, b) zu $1'$ 1 mm lang ist?

44. Von welchem Mittelpunktswinkel ist der Bogen gleich a) dem Halbmesser? b) s_8? c) s_4?

45. Welche Zeit vergeht, bis das Ende eines Minutenzeigers einen Weg beschreibt, der gleich seiner Länge ist?

46. Eine Bahnrichtung bilde mit einer andern einen Winkel von 45^0; beide sollen durch einen Kreisbogen von 865 m Halbmesser ineinander übergeführt werden. Wie lang wird der Bogen?

47. Welche Aufgaben lassen sich mit der Formel in § 33, 1 lösen, wenn man je eine der vorkommenden Größen als unbekannt, alle übrigen als bekannt ansieht? — Bilde entsprechende Aufgaben aus den folgenden zusammengehörigen Werten von r, $\sphericalangle \beta$, b, nämlich: 6; $29^0 22'$; 3,18 oder 150, $25^0 13'$; 66.

48. Der Inhalt der im I. Teil, Aufgabe XV, 124 beschriebenen Eilinie soll bestimmt werden für den Fall, daß das Dreieck gleichseitig, der große Halbmesser r, der kleine r_1 ist.

49. Durch die Ecken eines aus zwei Quadraten von der Seite a

zusammengesetzten Rechtecks werden Kreisbögen derart gezeichnet, [§ 33.] daß ihre Mittelpunkte in den Mitten der längeren Seiten und in den Mittelpunkten der Quadrate liegen. Der Flächeninhalt der entstandenen sogenannten Eilinie soll berechnet werden.

50. Drei gleiche Kreise berühren einander paarweise. Wie groß ist die zwischen den Kreisen liegende Fläche?

51. Wie groß ist der Mittelpunktswinkel desjenigen Kreisausschnitts, a) dessen Umfang gleich der Kreislänge ist? b) dessen Inhalt gleich dem Quadrat des Halbmessers ist?

52. Drei Kreise schneiden einander so, daß jeder durch die Mitte der beiden andern geht. Wie groß sind die einzelnen hierbei entstehenden Flächenteile?

53. Wenn in der Formel § 33,5 je zwei Größen gegeben sind, wie wird die dritte berechnet?

54. Welchen Inhalt hat ein Kreisabschnitt, dessen Berührungswinkel 36^0 (45^0, 60^0) und dessen Sehne s ist?

55. In welche Teile wird eine Kreisfläche durch eine Sehne geteilt, die zu einem Halbmesser senkrecht steht und auf diesem vom Mittelpunkt aus ein Stück abschneidet, das sich zum Halbmesser verhält wie a) $1 : 2$? b) $\sqrt{2} : 2$? c) $\sqrt{3} : 2$?

56. Wie groß ist die Summe der Kreisabschnitte, welche entstehen, wenn man um das Dreieck, dessen Seiten 13, 14, 15 sind, einen Kreis beschreibt?

57. Wie verhält sich der Inhalt des Kreisabschnittes, der zu a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{5}{12}$, c) $\frac{3}{8}$ des Umfanges gehört, zur ganzen Kreisfläche?

58. Eine Art von Spitzbogen entsteht, indem man aus den Grenzpunkten einer Strecke r Kreisbögen mit dieser Strecke als Halbmesser zieht. Wie groß ist a) der Umfang der Figur? b) ihr Inhalt?

59. Von den Grenzpunkten eines Halbkreises aus werden über diesem und zwar mit seinem Durchmesser als Halbmesser Bögen gezeichnet bis zu ihrem Schnittpunkt. Wie groß ist a) Umfang, b) Inhalt der Bogenfigur?

60. Eine Kreisfläche soll durch Kreise vom selben Mittelpunkt a) in n gleiche Teile geteilt, b) in 4 (n) solche Teile geteilt werden, daß diese, von innen aus gerechnet, das Verhältnis $\alpha : \beta : \gamma : \delta$ zueinander haben.

61. Wenn man bei einem einbeschriebenen regelmäßigen a) Dreieck, b) Viereck, c) Sechseck je über einer Seite als Durchmesser nach außen einen Halbkreis beschreibt, wie groß ist die entstehende mondförmige Figur?

62. a) Durch die Grenzpunkte einer Strecke seien zwei Kreisbögen mit den Halbmessern r und r_1 auf einerlei Seite der Geraden beschrieben; die zu der Sehne gehörigen Mittelpunktswinkel seien α und α_1. Welchen Inhalt hat das entstandene Möndchen?

[§ 33.] b) Man weise nach, daß dieser Inhalt gleich der des Vierecks der vier Halbmesser nach den Grenzpunkten der Sehne ist, wenn

$$r_1^2 : r^2 = \alpha : \alpha_1.$$

c) Man berechne den Inhalt für den Fall, daß dieses Verhältnis $= 1 : 2$ und außerdem r_1 gegeben ist.

63. Berechne den Inhalt der Figur (Arbēlos = Schusterkneif), welche in Nr. 23 zwischen den Halbkreisen liegt. — Wann hat im Fall zweier eingezeichneten Halbkreise der Inhalt der Figur seinen größten Wert?

64. Auf einer Strecke $AD = s$ liege eine Strecke $BC = t$. Beschreibe über AB und AC Halbkreise nach der einen, über BD und CD Halbkreise nach der andern Seite. Wie groß ist der Inhalt der entstehenden Figur (Pelekoid = beilförmige Fläche)? — Ist der Inhalt abhängig von der Lage von t? von der Größe von t? — Wie verhält sich der Inhalt zum Inhalt des Kreises über AD als Durchmesser? — Wie läßt sich hiernach der Inhalt durch entsprechend liegende Halbkreise in 2, 3, n Teile zerlegen?

Aufgaben zum neunten Kapitel.

XVI. Gebrauch der Funktionstafeln.

(Ohne Logarithmen).

§ 34. **1.** a) Zeichne einen Winkel $\alpha = 37^0$, ziehe zum einen Schenkel zwei Senkrechte und finde durch Messen von Strecken und durch Teilen zweimal den (annähernden) Wert von $\sin \alpha$. Vergleiche die Werte miteinander und mit dem in der Sinustafel enthaltenen Wert von $\sin 37^0$.

b) Ebenso für $\alpha = 47^0, 33^0, 64^0, 76^0$.

2. a) Zeichne von demselben Punkt aus neun Strahlen mit Zwischenwinkeln von je 10^0; ziehe zu den entstandenen Winkeln von $10^0, 20^0, \ldots 80^0$ beliebige Gegenkatheten, miß diese und die zugehörigen Hypotenusen und berechne (annähernd) $\sin 10^0$, $\sin 20^0, \ldots$ Vergleiche dann die gefundenen Werte mit denen der Sinustafel.

b) Durchschneide die Strahlen mit einem aus dem Strahlpunkt beschriebenen Kreisbogen, dessen Halbmesser = 1 dm, benütze die Strahlstrecken als Hypotenusen, bestimme die Gegenkatheten der Winkel in Dezimetermaß und berechne $\sin 10^0$, $\sin 20^0, \ldots\ldots$

3. Berechne für Aufgabe 1 den $\cos \alpha$.

4. Berechne gemäß Aufgabe 2 die einzelnen Werte von $\cos \alpha$; vergleiche sie mit den Werten der Cosinustafel.

5. Aus der Tafel zu entnehmen:

a) $\sin 72^0 40'$, b) $\sin 21^0 40'$, c) $\sin 21^0 43' = 0{,}3700$ (§ 36, 6),
d) $\cos 63^0 30'$, e) $\cos 74^0 10'$, f) $\cos 74^0 7' = 0{,}2737$.

6. a) $\sin x = 0{,}6428$, b) $\cos x = 0{,}9932$ ($6^0 41'$), c) $\operatorname{tg} x = 0{,}9827$, [§ 34.]
d) $\operatorname{cotg} x = 8{,}7769$.

7. Zeichne mit Benützung der Sinustafel (ohne Winkelmesser) einen Winkel von a) $20\frac{1}{2}^0$; b) $61^0 40'$; c) 4^0; d) $1\frac{3}{4}^0$.

8. Zeichne mit Benützung der Cosinustafel einen Winkel von a) 57^0; b) 28^0; c) 86^0.

9. Von einem Punkt aus gehen nach einer Geraden die Senkrechte und eine Schiefe, jene 82 mm, diese 125 mm lang. Welchen Winkel bilden beide Strecken miteinander?

10. In einem rechtwinkeligen Dreieck sind die Seiten a, b, c gegeben, nämlich: a) 3, 4, 5; b) 5, 12, 13; c) 4,8, 5,5, 7,3; d) $2uv$, $u^2 - v^2$, $u^2 + v^2$. Wie groß sind $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$?

11. Eine 4 m 80 cm lange Leiter werde auf wagrechtem Boden schräg an ein Haus gestellt, so daß ihr oberer Endpunkt 4 m 30 cm über dem Boden ist. Wie groß ist ihr Neigungswinkel am Boden?

12. Eine 4,4 m lange Leiter sei auf wagrechtem Boden schräg an eine Wand gestellt; ihr Fußpunkt steht 1,65 m von der Wand ab. Unter welchem Neigungswinkel ist die Leiter angestellt?

13. Ein schräg abwärts über einen Fluß gerudertes Boot kommt nach einem $\frac{1}{2}$ km betragenden Weg 453 m unter der Abfahrtstelle ans Land. Unter welchem Winkel gegen das Ufer bewegte sich das Boot voran?

14. Eine gerade gleichmäßig ansteigende 2 km lange Straße führt auf einen 80 m hohen Hügel. Unter welchem Steigungswinkel ist die Straße gebaut?

15. Bilde die der Aufgabe 14 entsprechende Aufgabe für die geneigte Schreibfläche einer Schulbank.

16. Unter welchem Neigungswinkel ist eine Treppe angelegt, die aus Stufen von je 16 cm Höhe und 30 cm Tiefe besteht?

17. Eine 5 m lange Stange werde auf wagrechtem Boden unter einem Neigungswinkel von 70^0 an eine Mauer gelehnt. Wie hoch ist ihr oberes Ende über dem Boden?

18. Die eine 25 cm lange Hälfte eines Wagbalkens dreht sich abwärts um 3^0; wieviel senkt sich dabei der Endpunkt?

19. Eine geradlinige Straße führt 800 m weit gleichmäßig unter 2^0 und dann 550 m weit unter 3^0 steigend aufwärts. Wie hoch liegt ihr Endpunkt über der Wagrechten des Anfangspunktes?

20. Eine 3 m 20 cm lange Doppelleiter wird an dem wagrechten Boden um 72 cm gespreizt. Welchen Winkel bilden ihre beiden Teile miteinander?

21. In zwei Punkten gleicher Höhe A und B sind die Endpunkte eines 24 m langen Seiles befestigt; dieses ist in der Mitte beschwert und hat sich hier von der Geraden AB aus um 84 cm gesenkt. Welchen Winkel bilden die beiden Seilhälften miteinander?

[§ 34.] **22.** Wie groß ist die Seite (der Umfang) des in einen Kreis vom Durchmesser 1 m einbeschriebenen regelmäßigen a) 9ecks? b) 18ecks? c) 25ecks?

23. Wie viele regelmäßige Sternneunecke gibt es? Wie groß ist die Seite eines jeden?

24. Einem Kreis, dessen Halbmesser 50 cm ist, sei ein regelmäßiges 40eck einbeschrieben. a) Wie groß ist dessen Umfang? b) Um wieviel ist dieser kleiner als der Kreisumfang?

25. Welchen Inhalt hat ein regelmäßiges a) 20eck, b) 30eck, c) 40eck, das einem Kreis vom Durchmesser 10 cm einbeschrieben ist?

26. In einen Kreis vom Halbmesser r (= 6 cm) sei eine Sehne gezeichnet, deren Länge a) $= \frac{4}{5}r$, b) $= \frac{3}{2}r$, c) $= 1\frac{3}{4}r$ ist. Welchen Inhalt haben die jedesmal entstehenden beiden Kreisteile?

§ 37, 1—3. **27.** Zwei Halbmesser eines Kreises bilden einen Winkel von 146^0; die Berührenden in ihren Endpunkten treffen einander 225 cm vom Mittelpunkt entfernt. Wie groß ist der Durchmesser des Kreises?

28. Eine Kreissehne von 65,8 cm bildet mit den Halbmessern nach ihren Grenzpunkten Winkel von 20^0. Welchen Durchmesser hat der Kreis?

29. Aus der Tafel zu entnehmen:

a) tg $45^0 20'$; b) tg $62^0 50'$; c) tg $62^0 54' = 1{,}9542$.
d) cotg $8^0 10'$; e) ctg $43^0 50'$; f) cotg $43^0 52' = 1{,}0404$.

30. Löse die Aufgaben 7, 8 und 16 mit der Tangenstafel.

31. Die Seiten eines Rechtecks seien 55 und 88; welche Winkel bildet eine Eckenlinie mit den Seiten?

32. a) Unter welchem Winkel müssen die Sonnenstrahlen einfallen, damit ein 1,76 m hoher aufrecht stehender Mensch einen Schatten von 10 m Länge werfe?

b) In einem griechischen Lustspiel (von Aristophanes) wird ein Mann zu einem Abendessen eingeladen für die Zeit einer 10füßigen Schattenlänge. Wie hoch stand die Sonne um diese Zeit, wenn die Höhe des Menschen $6\frac{1}{2}$ mal so groß ist als sein Fuß?

33. Wie vielmal so groß, als die Bäume, sind „der Bäume gigantische Schatten“, wenn die Sonne noch 4^0 hoch steht?

34. Welche Größe hat im Kreis vom Durchmesser 20 cm die Seite des umbeschriebenen regelmäßigen a) 10-seits? b) 18-seits? c) 24-seits?

35. Der Umfang eines Kreises beträgt 100 m. Welchen Umfang hat das umbeschriebene regelmäßige 50-seit?

36. Der Inhalt des einem Kreise umbeschriebenen regelmäßigen 9-seits beträgt = 81,9 qcm. Wie groß ist der Inhalt des Kreises?

37. Löse die Aufgaben 31, 32, 33 mit Benützung von Cotangens eines Winkels.

38. In einem Halbkreis, dessen Durchmesser 1 ist, bilde eine

Sehne mit dem Durchmesser den Umfangswinkel α. Man ziehe die [§ 37.] zu diesem Umfangswinkel gehörige Sehne, sowie die Berührenden in den Grenzpunkten des Durchmessers und verlängere die Sehnen bis zu ihren Schnittpunkten mit den Berührenden. a) Man drücke alle Strecken der Figur in Funktionen von α aus. b) Man leite die Zusammenhangs-Gleichungen der Funktionen von α aus dieser Figur ab.

XVII. Formeln der Funktionen eines Winkels.

1. Der Sinus eines Winkels β sei a) $\frac{3}{5}$; b) $\frac{7}{25}$; c) $\frac{n^2-1}{n^2+1}$. Wie groß ist der Cosinus desselben Winkels? § 34. § 37, 1—9.

2. Der Cosinus eines Winkels γ sei a) $\frac{40}{41}$; b) $\frac{4s}{4s^2+1}$; c) $\frac{a^2+2a}{a^2+2a+2}$. Wie groß ist der Sinus desselben Winkels?

3. Berechne aus den Angaben der Aufg. 1 den Wert von $\operatorname{tg}\beta$.

4. Ebenso $\operatorname{tg}\gamma$ aus den Angaben von Aufg. 2.

5. Es sei gegeben: a) $\sin\alpha = 0{,}8$; b) $\cos\alpha = s : \sqrt{1+s^2}$; c) $\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$; d) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{209}{120}$; e) $\operatorname{tg}\alpha = 2 : \left[\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\right]$; f) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{u^2-v^2}{2uv}$. Man soll stets $\operatorname{cotg}\alpha$ berechnen.

6. Wenn $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ ist, welchen Wert haben die übrigen Funktionen des Winkels α?

7. Wenn $\cos\beta = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ist, welchen Wert haben die übrigen Funktionen des Winkels β?

8. Man soll die folgenden Ausdrücke so umformen, daß sie nur noch eine Winkelfunktion enthalten, nämlich:

a) nur $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha,\quad \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha},\quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha},\quad \frac{\operatorname{cotg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-1}{\cos^2\alpha-1};$$

b) nur $\cos\alpha$:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha},\quad \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha},\quad \frac{1}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\operatorname{cotg}^2\alpha},\quad \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha\cdot(1-\cos\alpha)};$$

c) nur $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha},\quad \frac{\cos^2\alpha+\operatorname{tg}\alpha+\sin^2\alpha}{1+\operatorname{cotg}\alpha},\quad \operatorname{cotg}\alpha+\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha\cdot(1-\cos^2\alpha)}.$$

9. Stelle die Werte der Funktionen eines Winkels, jede durch jede andere ausgedrückt, übersichtlich zusammen.

10. Es sei: $50\cdot\sin^2\alpha + 75\cdot\sin\alpha = 63$. a) Wie groß ist $\sin\alpha$? b) Welchen Wert haben die drei andern Funktionen desselben Winkels α?

11. Wie groß sind sin und cos eines Winkels, wenn sich:

[§ 34, § 37, 1—9.] a) der erstere zum letzteren wie $1 : \sqrt{3}$ verhält? (Wie groß ist der Winkel selbst?)

b) das Quadrat des ersteren zu dem des letzteren wie $1600 : 81$ sich verhält?

12. Die Richtigkeit der folgenden (identischen) Gleichheiten ist zu erweisen:

a) $\sqrt{(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)} = \sin\alpha$;

b) $\cos\alpha : \sqrt{1 - \sin\alpha} = \sqrt{1 + \sin\alpha}$;

c) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$; d) $\operatorname{tg}\beta - \operatorname{cotg}\beta = \frac{1 - 2\cdot\cos^2\beta}{\sin\beta\cdot\cos\beta}$;

e) $(\operatorname{tg}^2\gamma + \operatorname{cotg}^2\gamma + 2)\cdot\sin^2\gamma\cdot\cos^2\gamma = 1$;

f) $\frac{\sin\delta + \operatorname{tg}\delta}{\operatorname{cotg}\delta + 1 : \sin\delta} = \sin\delta\cdot\operatorname{tg}\delta$; g) $\frac{\operatorname{tg}x + 1}{\operatorname{tg}x - 1} = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$;

h) $1 : \cos^2\alpha - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha$;

i) $(\sin v + \operatorname{tg} v)\cdot(\cos v + \operatorname{cotg} v) = (1 + \sin v)\cdot(1 + \cos v)$;

k) $\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha + \cos^2\alpha\cdot\operatorname{cotg}\alpha + 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha$;

l) $2\cdot(\sin^6\beta + \cos^6\beta) - 3\cdot(\sin^4\beta + \cos^4\beta) + 1 = 0$;

m) $\sin\gamma\cdot(1 + \operatorname{tg}\gamma) + \cos\gamma\cdot(1 + \operatorname{cotg}\gamma) = \frac{1}{\sin\gamma} + \frac{1}{\cos\gamma}$.

XVIII. Formeln der Funktionen zusammengesetzter Winkel.

§ 35. § 37, 10. **1.** Man soll die folgenden Funktionen durch Funktionen der einfachen Winkel ausdrücken:

a) $\frac{2}{\sin 2\alpha}$; b) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}$; c) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$; d) $\frac{\sin 2\alpha}{1 \pm \cos 2\alpha}$;

e) $\frac{\cos 2\alpha}{1 \pm \sin 2\alpha}$ f) $\frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha}$ g) $2\operatorname{cotg} 2\alpha$; h) $\operatorname{tg} 2\alpha + \frac{1}{\cos 2\alpha}$;

i) $\frac{4\cdot\operatorname{cotg} 2\alpha}{\sin 2\alpha}$ k) $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$ $\left[= \sin 2\alpha\right]$.

2. Es ist zu beweisen, daß:

a) $\left(\cos\frac{\alpha}{2} \pm \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 \pm \sin\alpha$. — Hieraus:

b) $2\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 + \sin\alpha} - \sqrt{1 - \sin\alpha}$.

$2\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 + \sin\alpha} + \sqrt{1 - \sin\alpha}$.

Berechne hiermit $\sin 15^0$ und $\cos 15^0$, sowie $\sin 9^0$ und $\cos 9^0$.

c) $(\sin\alpha + \cos\alpha + 1)\cdot(\sin\alpha - 1 + \cos\alpha) = \sin 2\alpha$;

d) $(\sin\alpha + \cos\alpha)\cdot(\cos\alpha - \sin\alpha) = \cos 2\alpha$;

e) $\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\cdot\operatorname{cotg} 2\alpha$;

f) $\operatorname{tg} 2\alpha + \frac{1}{\cos 2\alpha} = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$; g) $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2\cdot\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\cdot\sin\alpha + \sin 2\alpha}$;

h) $\frac{2\cdot\operatorname{cotg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha\,(1 + \operatorname{tg}\alpha)$.

i) $2\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta + 2\cdot\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta = 1 + \cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta$.

3. Berechne $\sin(\alpha \pm \beta)$ und $\cos(\alpha \pm \beta)$ für a) $\sphericalangle \alpha = 60^0$, $\beta = 30^0$; b) $\alpha = 60^0$, $\beta = 18^0$, c) $\alpha = 45^0$, $\beta = 18^0$. § 36.

4. Die Formel für $\cos(\alpha + \beta)$ soll aus dem Werte von $\sin(\alpha + \beta)$ allein durch Rechnung gefunden werden.

5. Man soll die folgenden Werte durch Funktionen der einfachen Winkel ausdrücken:

a) $\frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}$; b) $\frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b}$; c) $\frac{\cos(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}$; d) $\frac{\cos(a-b)}{\cos a \cdot \cos b}$;

e) $\frac{\sin(a+b) \pm \cos(a-b)}{\sin(a-b) \pm \cos(a+b)}$; f) $\sin(a+b) \cdot \sin(a-b)$;

g) $\cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$;

h) teile noch die Werte von f) und g) durch $\cos^2 a \cdot \cos^2 b$ und vereinfache sie möglichst;

i) $\frac{\sin(a+b)}{\cos(a-b)}$; k) $\frac{\sin(a-b)}{\cos(a+b)}$; l) $\sin^2(a+b) \pm \cos^2(a-b)$.

6. Beweise die Richtigkeit der folgenden Formeln:

a) $\sin(\varkappa - \lambda) \cdot \cos\lambda + \cos(\varkappa - \lambda) \cdot \sin\lambda = \sin\varkappa$;
b) $\cos(\varkappa - \lambda) \cdot \cos\lambda - \sin(\varkappa - \lambda) \cdot \sin\lambda = \cos\varkappa$;
c) $\sin(\varkappa + \lambda) \cdot \cos\varkappa - \cos(\varkappa + \lambda) \cdot \sin\varkappa = \sin\lambda$;
d) $\cos(\varkappa + \lambda) \cdot \cos\varkappa + \sin(\varkappa + \lambda) \cdot \sin\varkappa = \cos\lambda$;

7. Berechne die Sinus- und Cosinuswerte der Winkel

$$(\varkappa + \lambda + \mu), \qquad (\varkappa + \lambda - \mu), \qquad (\varkappa - \lambda - \mu)$$

in Funktionen der Winkel $\varkappa$, λ, μ.

8. Berechne $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ und $\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta)$ für a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{7}$; b) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}2$, $\operatorname{tg}\beta = 10$; c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$. § 37.

9. Beweise die Richtigkeit der folgenden Gleichheiten:

a) $1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$; b) $1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$;

c) $\operatorname{tg}(45^0 + \gamma) - \operatorname{tg}(45^0 - \gamma) = 2 \cdot \operatorname{tg} 2\gamma$.

10. Berechne aus Aufgabe XVII, 6 u. 7 die Funktionen von 2α und 2β.

11. Berechne die Funktionen von 3α und 4α ausgedrückt durch Funktionen des einfachen Winkels α.

12. Beweise, daß:

a) $\sin^3\alpha = \frac{3}{4}\sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 3\alpha$; b) $\cos^3\alpha = \frac{3}{4}\cos\alpha + \frac{1}{4}\cos 3\alpha$.

13. Für $\sphericalangle \alpha = 18^0$ ist $\sin 2\alpha = \cos 3\alpha$. Entwickle diese Gleichheit in Funktionen des einfachen Winkels α.

14. Die Formel: $2\sin\alpha\cos\beta - \sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta)$ soll abgeleitet und benützt werden, um, wenn § 38.

$$\cos 3^0 = 0{,}99863, \qquad \sin 4^0 = 0{,}069756, \qquad \sin 1^0 = 0{,}017452$$

gegeben, von 4^0 an die sin der Winkel von 3^0 zu 3^0 zu berechnen.

[§ 38.] **15.** Es seien $\cos 1^0 = 0{,}99985$, $\sin 30^0 = 0{,}5$, $\sin 29^0 = 0{,}48481$ gegeben; es sollen die Sinus von 28°, 27°, 26° der Reihe nach berechnet werden mit der Formel: $2 \sin\alpha \cos\beta - \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha - \beta)$.

16. Die sin und cos der Winkel seien bis 30° gegeben. Es sollen die Formeln:

$$\sin(30^0 + \alpha) = \cos\alpha - \sin(30^0 - \alpha),$$
$$\cos(30^0 + \alpha) = \cos(30^0 - \alpha) - \sin\alpha$$

abgeleitet und benützt werden, um sin und cos größerer Winkel zu berechnen.

17. Verwandle in Produkte von Funktionen die Ausdrücke:

a) $\sin 90^0 + \sin 30^0$; b) $\sin 60^0 - \sin 30^0$; c) $\cos 75^0 + \cos 45^0$;
d) $\cos 42^0 - \cos 78^0$;

e) $\frac{\sin 46^0 + \sin 22^0}{\sin 14^0 - \sin 10^0}$; f) $\frac{\sin 90^0 + \sin 34^0}{\cos 59^0 + \cos 3^0}$; g) $\frac{\sin 60^0 - \sin 40^0}{\cos 50^0 30' - \cos 10^0 30'}$.

18. Beweise, daß für irgend zwei Winkel $(\alpha + \beta)$ und $(\alpha - \beta)$ das Verhältnis aus a) der Summe und dem Unterschied der Sinus, b) der Summe und dem Unterschied der Cosinus, c) der Summe der Sinus und der Summe der Cosinus, d) der Summe der Sinus und dem Unterschied der Cosinus jener Winkel den Wert: a) $\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta$, b) $-\operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\beta$, c) $\operatorname{tg}\alpha$, d) $-\operatorname{cotg}\beta$ hat. — Beweise ferner, daß:

e) $\frac{\sin\gamma - \sin\delta}{\cos\gamma + \cos\delta} = \frac{\cos\delta - \cos\gamma}{\sin\delta + \sin\gamma}$; f) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}$.

XIX. Anwendung der log.-goniom. Tafeln im rechtwinkeligen Dreieck und im Kreis.

1. Aufsuchen der Logarithmen der Funktionen zu gegebenen Winkeln.

§ 39.

a. lg sin	$5^0 40' = \bar{2},9945$	i. lg sin	$28^0 11' = \bar{1},6742$
b. lg tg	$32^0 50' = \bar{1},8097$	k. lg cos	$26^0 53' = \bar{1},9503$
c. lg cos	$43^0 20' = \bar{1},8618$	l. lg tg	$44^0 17' = \bar{1},9891$
d. lg cotg	$30^0 10' = 0,2356$	m. lg cotg	$4^0\ 2' = 1,1517$
e. lg cos	$67^0 20' = \bar{1},5859$	n. lg tg	$57^0 26' = 0,1947$
f. lg tg	$84^0 40' = 1,0299$	o. lg cos	$78^0 43' = \bar{1},2915$
g. lg sin	$53^0 30' = \bar{1},9052$	p. lg cotg	$45^0\ 2' = \bar{1},9995$
h. lg cotg	$10^0 30' = 0,7320$	q. lg sin	$87^0 59' = \bar{1},9997$

r. lg sin $77^0 17'$ s. lg tg $2^0 39'$ t. lg cotg $4^0 5'$
u. lg cos $57^0 58'$ v. lg tg $86^0 3'$ w. lg cotg $85^0 4'$.

2. Aufsuchen der Winkel zu gegebenen Logarithmen der Funktionen. [§ 39.]

a) $\lg \sin x = \bar{1},4567$ $(\measuredangle x = 16^0 38')$

b) $\lg \cos x = \bar{1},7489$ $(\measuredangle x = 55^0 53')$

c) $\lg \operatorname{cotg} x = 0,5649$ $(\measuredangle x = 15^0 14')$

d) $\lg \operatorname{tg} x = 1,5318$ $(\measuredangle x = 88^0 19')$

e) $\lg \sin x = \bar{1},2201$ f) $\lg \operatorname{tg} x = 0,2999$

g) $\lg \operatorname{cotg} x = 1,5540$ h) $\lg \cos x = \bar{1},8374$

3. a) $\sin x = \frac{3}{5}$; b) $\cos x = \frac{13}{85}$; c) $\operatorname{cotg} x = \frac{24}{143}$; d) $\operatorname{tg} x = \frac{734}{189}$.

4. a) Wenn von den Stücken a, b, c, α, β eines rechtwinkeligen Dreiecks irgend zwei gegeben sind, welche und wie viele Einzelaufgaben kann es hiernach geben? § 40.

b) Welche dieser Aufgaben ist unbestimmt? Auf wie viele verschiedene Aufgaben lassen sich die übrigen zurückführen?

5. In der folgenden Zusammenstellung sind je drei zusammengehörige Stücke eines rechtwinkeligen Dreiecks angegeben. Wähle beliebige zwei aus und berechne das dritte ohne Benützung von Logarithmen* und dann mit Logarithmen.

Nr.	a	b	c	α	β
1.	5		10	30^0	60^0
2.	44		55	$53^0 10'$	$36^0 50'$
3.		2,4	8	$62^0 30'$	$17^0 30'$
4.		81,7	95	$30^0 40'$	$59^0 20'$
5.		8,37	31	$74^0 20'$	$15^0 40'$
6.	116		145	$53^0 10'$	$36^0 50'$
7.	70,2		135	$31^0 20'$	$58^0 40'$
8.	1	5		$11^0 20'$	$78^0 40'$
9.	235	94		$68^0 10'$	$21^0 50'$
10.	23,4	210,6		$6^0 20'$	$83^0 40'$
11.	15	3,6		$76^0 30'$	$13^0 30'$
12.	136	85		58^0	32^0

6. Wähle aus der folgenden Zusammenstellung pythagoreischer Dreiecke (§ 29, 10 Zus.) je zwei das Dreieck bestimmende Stücke aus, berechne die fehlenden und vergleiche die gefundenen Werte mit den in der folgenden Übersicht enthaltenen.

---

* Die Werte der Winkelfunktionen sind dabei auf zwei Bruchstellen genau aus der Funktionstafel zu entnehmen.

[§ 40.]

Nr.	a	b	c	α	β	J
1.	3	4	5	36°52′	53° 8′	6
2.	12	5	13	67°23′	22°37′	30
3.	7	24	25	16°16′	73°44′	84
4.	12	35	37	18°55′	71° 5′	210
5.	140	51	149	69°59′	20° 1′	3570
6.	115	252	277	24°32′	65°28′	14490

7. Wie groß ist die Hypotenuse, wenn die Halbierende des einen Winkels von 50° gleich 12 ist?

8. Ein Weg sei unter einem Steigungswinkel von 4°30′ angelegt; wieviel Prozent Steigung hat er (d. h. auf je 100 Einheiten in wagrechter Richtung)?

9. Wenn die Katheten $a = 16$ und $b = 63$ sind, wie groß sind a) die Halbierenden ihrer Gegenwinkel? b) die Teile von α, welche der Eckstrahl nach der Mitte von a bildet?

10. Wie hoch ist ein auf einer Ebene stehender Turm, wenn er in einer Entfernung von 215 m unter einem Winkel = 12°23′ erscheint? (Von der Höhe des Beobachters ist abzusehen.)

11. Die Spitze des Straßburger Münsterturmes erscheint in einer wagrechten Entfernung von a Metern unter einem gewissen Erhebungswinkel, und dieser verdoppelt (verdreifacht) sich, wenn man um b Meter näher herankommt. Wie groß ist der Winkel? und wie hoch der Turm? $a = 1$ km; $b = 510{,}2$ m (685 m).

12. Wieviele Erdhalbmesser ist der Mond von der Erde entfernt, wenn ein Ort auf der Erde, wo der Mond gerade in wagrechter Richtung steht, und ein Ort, wo er in lotrechter Richtung gesehen wird, um einen Bogen voneinander entfernt sind, der 57′ weniger als einen Rechten umfaßt? (Benütze § 39, 3 u. 6).

13. Aristarch von Samos (250 v. Ch.) suchte zu ermitteln, wievielmal weiter die Sonne als der Mond von der Erde entfernt sei, indem er zur Zeit, da der Mond uns gerade zur Hälfte beleuchtet erscheint, wenn also der Winkel Sonne-Mond-Erde ein Rechter ist, den Winkel Mond-Erde-Sonne maß. a) Er meinte, dieser Winkel sei 3° kleiner als ein Rechter; welches wäre hiernach das Entfernungsverhältnis? — b) Wie groß ist es dagegen, wenn tatsächlich jener Winkel nur 9′ kleiner als ein Rechter ist? (Benütze § 39, 3 u. 6). — c) Wieviele Erdhalbmesser wäre hiernach die Sonne von der Erde entfernt, wenn der Mondabstand 60 Erdhalbmesser beträgt? — d) Wievielmal ist der Sonnenhalbmesser größer als der Erdhalbmesser, wenn ersterer unter einem Winkel von 16′ gesehen wird?

14. Man soll die fehlenden Stücke eines rechtwinkeligen Dreiecks berechnen, wenn von ihm bekannt ist: [§ 40.]

a) $a + b = 79, \quad \alpha = 14^0 15'$; d) $a + b + c = 132, \quad \beta = 79^0 37'$

b) $a - b = 1, \quad \beta = 46^0 24'$; e) $h_c = 8, \quad \alpha = 19^0 52'$;

c) $c - a = 7, \quad \alpha = 8^0 0' 30''$;

f) $a : b = b : c$; (es sind nur die Winkel zu berechnen.)

g) $\varrho = 2, \quad \alpha = 63^0 7'$;

h) $\varrho = 15, \quad a + b + c = 176$.

15. Man soll beweisen, daß in jedem rechtwinkeligen Dreieck die folgenden Gleichheiten gelten:

a) $\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = \frac{b + c}{a}$; a') $\cos(\alpha - \beta) = \sin 2\alpha$;

b) $a \cdot \cos \alpha = b \cdot \cos \beta = c \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta$;

c) $(b + c) \cdot \cos \alpha + (c + a) \cdot \cos \beta = a + b + c$;

d) $a - b = (c - b) \cdot \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} - (c - a) \cdot \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2}$;

e) $2 \cdot c \cdot \cos^2 \frac{\beta}{2} = c + a$; f) $2 \cdot c \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2} = c - a$;

g) $1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{2c}{a + b + c}$; h) $2 \cdot \operatorname{cotg} \beta : \sin 2\alpha = c^2 : b^2$;

i) $a + b = c\sqrt{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$; k) $a - b = c\sqrt{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$.

16. Sind a, b, c und a_1, b_1, c_1 die Seiten zweier pythagoreischen Dreiecke, so erhält man ein neues aus $(ab_1 + ba_1)$, $(bb_1 - aa_1)$, cc_1; in diesem ist ein Winkel gleich der Summe der betreffenden Winkel in jenen Dreiecken (Vieta). Beweis. — Es ergeben sich ferner solche Dreiecke aus dem ersteren mit einem verdoppelten Winkel und den Seiten $2ab$, $(b^2 - a^2)$, c^2, mit dem dreifachen Winkel $(3ab^2 - a^3)$, $(3a^2b - b^3)$, c^3, dem vierfachen Winkel $(4ab^3 - 4a^3b)$, $(b^4 - 6a^2b^2 + a^4)$, c^4 u. s. w.

17. Ein Ort habe β^0 geographische Breite. Wie groß ist a) der Halbmesser seines Parallelkreises? b) ein Längengrad auf ihm? [Erdhalbmesser = 6370 km]. — Beispiel für β: a) $30^0 5'$ (Kairo); b) $52^0 30'$ (Berlin); c) $59^0 20\frac{1}{2}'$ (Stockholm); d) $71^0 10'$ (Nordkap). § 41.

18. Wie groß ist in einem Kreis, dessen Halbmesser $= r$ ist, die Fläche zwischen zwei Sehnen, a) die von einem Punkt des Umfangs ausgehen und mit dem Durchmesser dieses Punktes die Winkel 45^0 und 36^0 auf den Gegenseiten (oder auf gleicher Seite) des Durchmessers machen? b) die parallel sind und je $\frac{1}{8}$ des Umfangs zwischen sich haben?

19. Wie groß ist die von einem Bogen und den Berührenden

[§ 41.] seiner Grenzpunkte begrenzte Fläche, wenn der Halbmesser $= r$ und der Mittelpunktswinkel des Bogens $= \beta$ ist? — Beisp.: $r = 24, \beta = 135^0$.

20. Zwei geradlinige Schienengeleise würden sich in der Verlängerung unter 108^0 schneiden; sie sollen durch einen Kreisbogen von 500 m Halbmesser verbunden werden. a) In welcher Entfernung vom Schnittpunkt muß der Bogen beginnen? b) Wie lang wird der Bogen? c) Wie viele Quadratmeter Gelände werden zwischen dem Bogen und der Strecke seiner Grenzpunkte liegen? d) wieviel Gelände zwischen dem Bogen und den Verlängerungen der Schienenrichtungen bis zu ihrem Schnittpunkt?

21. Der Venediger ist 3670 m hoch und liegt in der Mittagslinie von Venedig 100′ ($1^0 40'$) nördlich von der Stadt. Es soll ermittelt werden, ob es denkbar ist, daß man von seinem Gipfel die Stadt sehen kann, indem man bestimmt a) wie hoch der Berg sein müßte, um bis in die Verlängerung der wagrechten Ebene der Stadt emporzuragen; b) wie groß der Winkel zwischen der Lotlinie des Berges und dem Erdhalbmesser nach dem Berührungspunkt der Berührenden ist, die von der Spitze des Berges an den Meeresspiegel geht. Der Erdhalbmesser ist 6370 km. (Benütze für sin 50′ § 39, 3).

22. Wie hoch ist der Teil der Lufthülle der Erde, der noch merkbar das Sonnenlicht zurückwirft, wenn diese schon 16^0 unter die wagrechte Ebene des Beobachters hinabgesunken ist, während der letzte Wiederschein der Dämmerung bei dieser Ebene gerade verschwindet? (Erdhalbmesser = 6370 km).

23. Der Gipfel des Pik von Teneriffa erscheint am Meeresspiegel, wenn man sich 222 km entfernt und 10 m über der Meeresfläche befindet. Welches ist die ungefähre Höhe des Berges? (Umfang der Erde = 40000 km. — Benütze § 39, 3).

24. Wie lang ist ein nicht gekreuzter Treibriemen zu nehmen, der um 2 Räder laufen soll, deren Mittelpunktsabstand 1615 mm und deren Halbmesser 989 und 571 mm betragen? — Wie lang müßte der gekreuzte Riemen sein?

25. An einen Kreis vom Halbmesser r gehen zwei Berührende $= t$, die einen Winkel $= \tau$ bilden; der zugehörige Mittelpunktswinkel sei β, sein Bogen $= b$, die Berührungssehne $= s$. Welche dieser Stücke müssen bekannt sein, damit man die übrigen zu berechnen vermag? — Man löse solche Aufgaben für die folgende Gruppe zusammengehöriger Werte: $r = 20$, $t = 22{,}37$, $\tau = 82^0 36'$, $\beta = 97^0 24'$, $b = 34$, $s = 29{,}82$.

26. Welchen Inhalt hat ein Kreisabschnitt, wenn dessen Sehne $= 7$ und Höhe $= 2$ ist?

27. Eine Kreissehne von der Länge $2s$ teile den dazu senkrechten Durchmesser im Verhältnis von $p : q$. Wenn nun jeder Grenzpunkt des Durchmessers mit den Grenzpunkten der Sehne verbunden wird,

welche Winkel bilden die beiden Geradenpaare? und in welchem [§ 41.] Verhältnis wird die Kreisfläche geteilt, wenn $2s = 16$ und $p : q = 3 : 5$ ist?

28. Wenn ein Kreisausschnitt durch seine Sehne halbiert wird, welche Gleichung bestimmt den Mittelpunktswinkel?

XX. Die Winkelfunktionen im gleichschenkeligen Dreieck und regelmäßigen Vieleck.

1. Im gleichschenkeligen Dreieck möge a den Schenkel, b die Grundseite und α den Winkel an ihr bedeuten. Man soll nun aus der folgenden Tafel zusammengehöriger Werte einzelne Aufgaben bilden und zwar je nachdem a) a und b, b) a und β, c) b und α, d) b und h, e) a und h, f) h und β gegeben sind.

Nr.	a	b	α	β	h	J
1.	14,3	11	67°23′	45°14′	13,2	72,6
2.	53	56	58° 7′	63°47′	45	1260
3.	1,7	1,6	61°56′	56° 9′	1,5	1,2
4.	1,13	0,3	82°22′	15°15′	1,12	0,168
5.	96,5	168	29°29′	121° 1′	47,5	3990
6.	233	210	63°13′	53°34′	208	21 840
7.	425	832	11°49′	156°22′	87	36 192

2. Der Winkel an der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks sei in drei gleiche Teile geteilt; in welchem Verhältnis stehen die Abschnitte der Grundseite?

3. Eine Strecke erscheint, von einem Punkt ihrer Mittelsenkrechten aus betrachtet, unter einem Sehwinkel α, von einem um a näheren Punkte unter dem Sehwinkel β. Wie lang ist die Strecke? — Beispiel: $a = 17{,}3$; $\sphericalangle\, \alpha = 13^0$; $\sphericalangle\, \beta = 27^0 35'$.

4. Wie weit muß mir Jemand a) den 2 cm breiten Finger, b) eine Stricknadel von 3 mm Dicke vom Auge entfernt halten, um damit den Vollmond zu bedecken, der eine scheinbare Breite von 31′ hat? (Benütze § 39, 3).

5. Eine Sehne und die mit ihr parallele Berührende, die durch die Schenkel des zugehörigen Mittelpunktswinkels begrenzt wird, verhalten sich wie 3 : 5. Wie groß ist dieser Winkel?

6. Der Umfang eines regelmäßigen a) Fünfecks, b) Neunecks, c) Fünfzehnecks betrage u (= 100); wie groß sind die Eckenlinien des bezüglichen Vielecks?

7. Albrecht Dürer gibt an, die Seite des einem Kreis einbeschriebenen Siebenecks sei annähernd gleich der halben Seite des einbeschriebenen regelmäßigen Dreiecks. Wie weit ist dies genau?

[§ 41.] **8.** Wieviele Millimeter muß der Halbmesser eines Kreises lang sein, wenn ein regelmäßiges Neuneck von 10 mm Seite einbeschrieben werden soll?

9. Der Umfang eines Kreises sei u ($= 60$); wie groß ist der Umfang des ihm umbeschriebenen regelmäßigen Siebenecks?

10. Wie groß ist der Inhalt eines regelmäßigen Fünfecks, wenn dessen Eckenlinie $= 6{,}8$ ist?

11. Beweise für das gleichschenkelige Dreieck die folgenden Gleichheiten (vgl. Aufg. XIX, 15):

a) $a + b - b \cdot \cos\alpha - a \cdot \cos\beta - 2a \cdot \cos\alpha = 0$;

b) $(2a - b) \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = b \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2\varrho$.

12. Wenn in einem Dreieck $\cos\beta = \frac{\sin\alpha}{2 \cdot \sin\gamma}$, so ist dasselbe gleichschenkelig. — Andeutung: Benütze den Nebenwinkel von α.

13. Wenn in einem Dreieck $a \operatorname{tg}\alpha + b \operatorname{tg}\beta = (a + b) \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha + \beta}{2}$, so ist $\sphericalangle\, \alpha = \beta$.

Aufgaben zum zehnten Kapitel.

XXI. Die Winkelfunktionen im schiefwinkeligen Dreieck.

§ 42. **1.** Bestimme A) durch die Funktionstafel:
a) $\sin 138^0$, b) $\cos 153^0$, c) $\operatorname{tg} 104^0$, d) $\operatorname{cotg} 93^0$.
B) durch die log.-goniom. Tafel:
e) $\sin 138^0 45'$; f) $\cos 153^0 12'$; g) $\operatorname{tg} 104^0 8'$; h) $\operatorname{cotg} 93^0 16'$.

2. Bestimme den Winkel A) durch die Funktionstafel:
a) $\sin\alpha = 0{,}8572$ (2 Werte), b) $\cos\alpha = -0{,}891$, c) $\operatorname{tg}\alpha = -1{,}327$, d) $\operatorname{cotg}\alpha = -1{,}804$.
B) durch die log.-goniom. Tafel:
e) $\lg\sin\alpha = \overline{1},8673$ (2 Werte), f) $\lg\cos\alpha = \overline{1},6073$ (—),
g) $\lg\operatorname{tg}\alpha = 1{,}8005$ (—), h) $\lg\operatorname{cotg}\alpha = 0{,}9405$ (—).

3. Von folgenden Winkeln sollen Sinus und Cosinus in den bekannten Wurzelgrößen für die Funktionen der betreffenden spitzen Winkel ausgedrückt werden erstens durch Benützung des entsprechenden Nebenwinkels und zweitens durch Zerlegung des Winkels a) 120^0, 144^0, 150^0 in 2 gleiche Teile, b) 105^0, 108^0, 135^0 in ungleiche Teile.

§ 43. **4.** Wenn die Winkel eines Dreiecks a) 45^0, 60^0, 75^0, b) 15^0, 45^0, 120^0, c) 30^0, 60^0, 90^0 messen, welches Verhältnis haben diese Winkel und die bezüglichen Gegenseiten? (Probeweise Messung.)

5. Wenn sich die Winkel eines Dreiecks verhalten wie a) $1:2:3$, b) $2:3:4$, c) $4:5:6$, welche Größe haben die Winkel? und wie verhalten sich die Seiten?

6. Wenn die Seiten eines Dreiecks das Verhältnis a) $2:3:4$, [§ 43]. b) $4:5:6$, c) $3:4:6$, d) $4:9:12$ besitzen, wie groß sind dessen Winkel? Wie groß aber, wenn das Seitenverhältnis e) $1:2:3$ angenommen würde?

7. Welchen Wert liefert der Cosinussatz für c^2, wenn a) $\gamma = \frac{2}{3}R$, b) $\sphericalangle \gamma = \frac{4}{3}R$, c) $a = c$ ist? (Vgl. Aufgaben XII, 11.)

8. Was gilt für den Winkel, wenn der Cosinussatz für $\cos\alpha$ einen negativen Wert liefert? (z. B. für $a = 9$, $b = 5$, $c = 6$).

9. Der Sinussatz erscheint in drei Formen. Wie läßt sich, wenn zwei derselben angenommen werden, die dritte ans ihnen allein durch Rechnung ableiten? — Ebenso für die Sätze in § 43, 3 und 4.

10. a) Wie läßt sich unter Annahme des Sinussatzes und des Satzes von der Winkelsumme $= 2R$ der Satz der Abschnitte (§ 43, 3) und der Cosinussatz allein durch Rechnung ableiten?

Ebenso sollen je die beiden andern Sätze b) aus dem Satz von den Seitenabschnitten, c) aus dem Cosinussatz abgeleitet werden.

Andeutung zu a): Entwickle $\sin\alpha = \sin(\beta + \gamma)$ und teile die Gleichung durch $\sin a$.

Zu b): Berechne aus zwei Formeln dieselbe Seite und setze die Werte gleich; — ferner vervielfache die Werte für a, b, c mit a, b, c und bilde die passende Summe.

Zu c): Aus $\cos\alpha$ berechne $\sin\frac{\alpha}{2}$ und $\cos\frac{\alpha}{2}$ und benütze § 35, 2, — ferner berechne $b \cdot \cos\gamma$ und $c \cdot \cos\beta$.

11. Wie lassen sich aus der einzigen Annahme der drei Gleichungen:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R, \qquad a = b\cos\gamma + c\cos\beta, \qquad b : c = \sin\beta : \sin\gamma$$

alle übrigen Formeln in § 43, 1—5 ableiten?

12. Löse die sogenannten Cagnolischen Gleichungen in § 43, 5 nach b und c als Unbekannten auf und vereinfache möglichst. — Andeutung: Beachte, daß $\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\beta+\gamma}{2}$ und $\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\beta+\gamma}{2}$.

13. Erhebe die Cagnolischen Gleichungen (§ 43, 5) in den zweiten Grad und zähle zusammen.

14. Aus den Formeln für $\sin\frac{\alpha}{2}$ und $\cos\frac{\alpha}{2}$ in § 43, 6, Anm. soll man a) den Satz $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ bestätigen, b) die Werte für $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ berechnen.

15. Fällt man vom Schnittpunkt einer Winkelhalbierenden mit der Gegenseite eine Senkrechte auf eine der andern Seiten, so ergibt sich auf dieser zwischen dem Scheitel und der Senkrechten ein Abschnitt, der für alle solche Dreiecke über der Gegenseite der gleiche bleibt, in denen die Summe der beiden andern Seiten (Fahrstrahlen der Ellipse) unveränderlich ist.

[§ 43]. **16.** In jedem Dreieck gelten die Gleichungen:

a) $b \cos\beta + c \cos\gamma = a \,.\, \cos(\beta - \gamma)$,

b) $a(b \cos\gamma - c \cos\beta) = b^2 - c^2$.
(Geometrischer Beweis oder durch Rechnung.)

c) $(a + b)\cos\gamma + (b + c)\cos\alpha + (c + a)\cos\beta = a + b + c$.
(Zuerst geometrischer Beweis.)

d) $1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{2c}{a+b+c}$.

17. Für den Fall, daß $\sphericalangle(\alpha + \beta + \gamma) = 2R$, sind die folgenden Gleichheiten nachzuweisen:

a) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$;

b) $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$;

c) $1 - 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$;

d) $\operatorname{cotg}\alpha + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta\cdot\sin\gamma} = \operatorname{cotg}\beta + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\gamma} = \operatorname{cotg}\gamma + \frac{\sin\gamma}{\sin\beta\cdot\sin\alpha}$.

e) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$.

Andeutung: Wende auf $\sin 2\alpha + \sin 2\beta$ Formel XI (S. 136, § 38, 1) an und setze $\sin 2\gamma = -2\cdot\sin\gamma\cdot\cos(\alpha + \beta)$.

f) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$.

Andeutung: Wende auf $\cos\alpha + \cos\beta$ Formel XI an und setze $\cos\gamma = 1 - 2\cdot\sin^2\frac{\gamma}{2}$.

XXII. Seiten und Winkel des schiefwinkeligen Dreiecks.

I. Fall.

§ 44. Die fehlenden Stücke eines Dreiecks sollen berechnet werden, wenn gegeben ist:

1. $a = 56$, $\sphericalangle\beta = 49^0 57'$, $\sphericalangle\gamma = 68^0 20'$.
Erg.: $b = 48{,}68$; $c = 59{,}1$.

2. $b = 342{,}1$, $\sphericalangle\alpha = 18^0 33'$, $\sphericalangle\gamma = 51^0 20'$.
Erg.: $\beta = 110^0 7'$; $a = 115{,}9$; $c = 284{,}4$.

3. $c = 0{,}99$, $\sphericalangle\beta = 100^0$, $\sphericalangle\gamma = 32^0 50'$.

4. $b = 1$, $\sphericalangle\alpha = 29^0 1'$, $\sphericalangle\gamma = 54^0$.

5. Bei der Vermessung des Großherzogtums Baden (vgl. das Kärtchen) wurde im Nordwesten des Landes die Strecke Speyer-Oggersheim = 19759 m gemessen. Wenn nun auch die in der Nähe liegenden Punkte Calmit, Königstuhl (bei Heidelberg), Melibokus mit ihren Anfangsbuchstaben bezeichnet werden und wenn gemessen wurde:

$\sphericalangle\ SOC = 62^0 31'$, $\sphericalangle\ CSO = 75^0 24'$, $\sphericalangle\ SKO = 45^0 28'$, [§ 44.]
$\sphericalangle\ KOS = 55^0 21'$, $\sphericalangle\ KMO = 46^0 25'$, $\sphericalangle\ MOK = 74^0 59'$,
welche Entfernung haben irgend zwei Punkte voneinander?

6. Während die Sonne gegen Süden steht und ihre Strahlen einen Winkel α mit der wagrechten Ebene bilden, werde ein Stab schräg in den Boden gesteckt, so daß er gegen Norden geneigt ist und mit der Länge a hervorragt. a) Wie groß ist die Schattenlänge, wenn der Neigungswinkel des Stabes β ist? b) Bei welchem Neigungswinkel des Stabes wird der Schatten am längsten? c) bei welchem am kürzesten? d) bei welchem gleich der Stablänge a?

7. Ein Winkel ASB sei $= 70^0 20'$ und $SA = 41$ m gemessen. Nun soll in A zu AS die Senkrechte AN errichtet werden; es geschieht dies mit einer ungenauen Kreuzscheibe, welche Winkel von 89^0 und 91^0 gibt (statt 90^0). Wenn nun die mit Benützung des ersten Winkels erhaltene Sehlinie auf SB in Q, die zweite Sehlinie in R und AN in N einschneidet, wie groß sind die Fehler NQ und NR? — Antwort: $NR = 6{,}256$ m.

8. In einem gleichseitigen Dreieck, dessen Seite $= a$, werde ein Winkel in drei gleiche Teile geteilt. In welche Teile wird hierdurch die Gegenseite jenes Winkels geteilt?

II. Fall.

Die fehlenden Stücke eines Dreiecks zu finden aus:

9. $a = 11$, $b = 9$; $\sphericalangle\ \gamma = 47^0 30'$.
Erg.: $c = 8{,}260$; $\sphericalangle\ \alpha = 79^0 3'$.

10. $a = 7$, $b = 10$; $\sphericalangle\ \gamma = 100^0$.

11. $b = 79$, $c = 101$; $\sphericalangle\ \alpha = 119^0 42'$ Erg.: $a = 156$.

12. $a = 59{,}38$, $c = 72{,}01$, $\sphericalangle\ \beta = 68^0 1'$.

13. a) In ein Bahngleis ABC mündet bei B ein zweites Gleis FB ein unter einem Winkel $ABF = 32^0 20'$. Wenn nun von B zwei Züge ausgehen, der eine nach F zu, der andere nach A mit einer Geschwindigkeit von 12,5 und 14 m in der Sekunde, wie weit sind die Züge nach $4\frac{1}{2}$ Minuten voneinander entfernt?

b) wie weit, wenn der letztere Zug von B nach C fährt?

14. a) Wie lang ist $A_1 B_1$ in Fig. 5 (S. 12), wenn

$$\sphericalangle\ S = 14^0 15' \quad \text{und} \quad SA = 65, \quad SB = 93, \quad AA_1 = 13?$$

b) Dieselbe Aufgabe ist für Fig. 23 (S. 23) zu lösen, nur daß nicht AA_1, sondern $AB_1 = 46{,}6$ gegeben sei.

15. In einem Parallelogramm sind die Eckenlinien und ihr Winkel gegeben: 38,70, 43,59, $123^0 45'$. Wie groß sind die Seiten und Winkel des Vierecks?

[§ 44.] **16.** In einem gleichseitigen Dreieck ist eine Seite in drei gleiche Teile geteilt und die Teilpunkte seien mit dem Gegeneck verbunden. Welche Winkel entstehen an diesem Gegeneck? (Vgl. Aufg. 8.)

17. In einem Dreieck ist eine Seite dreimal so lang als eine andre und der eingeschlossene Winkel 40^0. a) Wievielmal übertrifft die dritte Seite die kleinste? b) Wie groß sind die beiden andern Winkel? Jede Größe soll unmittelbar aus den gegebenen Stücken berechnet werden und dann c) sollen noch die drei Größen aus zwei Formeln abgeleitet werden, die die drei Unbekannten vermischt enthalten.

18. Von einem Kreispunkt aus gehen zwei Sehnen $AB = 140{,}3$ (10,35) und $AC = 543$ (14,14) und bilden einen Winkel $= 150^0$ (60^0). Welchen Winkel bildet die Berührende in A mit der Schnittgeraden BC? und wie groß sind die Strecken der Berührenden und der Schnittgeraden?

19. Von einem Viereck, dessen zwei gegenüberliegende Winkel (ab) und (cd) gleich seien, sind die Seiten gegeben $= a, b, c, d$. Wie groß sind die gleichen Winkel? — Beispiel: $a = 19, b = 21, c = 13{,}55, d = 24$.

Andeutung: Berechne die Eckenlinie, die nicht durch die gleichen Winkel geht, zweimal und setze die beiden Werte gleich.

III. Fall.

Die fehlenden Stücke eines Dreiecks zu finden aus:

20. $a = 4, \quad b = 5, \quad c = 6$. [Wie läßt sich zeigen, daß $\sphericalangle\, ab = 2 \cdot \sphericalangle\, bc$ ist?]

Erg.: $\alpha = 41^0 25'$; $\beta = 55^0 46'$.

21. $a = 21, \ b = 17, \ c = 10$. **22.** $a = 75, \ b = 92, \ c = 29$.

23. $a = 277, \ b = 373, \ c = 390$. — Erg.: $\gamma = 72^0 2'$.

24. $a = 70{,}85, \ b = 4{,}35, \ c = 71{,}44$.

25. a) Von drei Kreisen berühre jeder die beiden andern ausschließend. Welche Winkel bilden die Mittellinien miteinander? — $r_1 = 3{,}56$; $r_2 = 5{,}009$; $r_3 = 14{,}7$.

b) Wenn aber der größte der Kreise die beiden andern einschließend berührt, wie löst sich nun die Frage in a)?

26. Zwei Kreise mit den Halbmessern $r_1 = 13$ mm und $r_2 = 7{,}6$ mm haben einen Mittelpunktsabstand $d = 31$ mm. Welchen Winkel bildet ein äußerer Ähnlichkeitsstrahl mit der Mittellinie, wenn sein bis zum kleineren Kreise reichendes kleineres Stück $= 40$ mm ist?

27. Eine (wagrechte) Strecke a werde von einem Punkt aus betrachtet, der von ihren Grenzpunkten um b und c entfernt ist. α) Unter welchem Gesichtswinkel erscheint a? β) Unter welchem Gesichtswinkel erscheint aber die Strecke a, wenn sie von einem

ihrer Mitte gegenüberliegenden gleichweit wie vorhin entfernten Punkt [§ 44.] aus betrachtet wird? — Beispiel: $a = 5$, $b = 7$, $c = 9$.

28. Wie groß sind die Winkel (und Eckenlinien) eines Trapezes, dessen Parallelseiten sind $a = 19$, $c = 4{,}5$ und dessen andere Seiten sind $b = 15$, $d = 7{,}8$?

IV. Fall.

Die fehlenden Stücke eines Dreiecks zu finden aus:

29. $a = 15$, $b = 13$, $\alpha = 67^0$.
Erg.: $\beta = 52^0 55'$ oder $= ?$

30. $b = 203$, $c = 245$, $\gamma = 96^0 24'$.

31. $c = 17$, $a = 12$, $\alpha = 28^0$.
Erg.: $b = 23{,}97$ oder $6{,}047$.

32. $a = 573{,}9$, $b = 499{,}1$, $\sphericalangle \alpha = 97^0 38'$.

33. $c = 35$, $a = 26{,}98$, $\sphericalangle \alpha = 49^0 40'$.

34. Von der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks, dessen Schenkel $= s$, sei nach der Grundseite eine Strecke $= t$ gezogen, welche mit ihr einen Winkel τ bildet. Wie weit ist der Endpunkt der Strecke t vom Grenzpunkt der Grundseite entfernt? — Beispiele:
1) $s = 19$, $t = 32$, $\sphericalangle \tau = 31^0 42'$; 2) $s = 19$, $t = 16$, $\sphericalangle \tau = 31^0 42'$.

35. In einem Kreis vom Halbmesser r sei eine Sehne s und in deren einem Grenzpunkt die Berührende gezogen. Wenn vom andern Grenzpunkt von s aus nach der Berührenden hin eine Strecke $= v$ abgetragen wird, welche Strecke wird vom Berührungspunkt aus auf der Berührenden begrenzt? — Beispiel:

$$r = 6; \quad s = 8{,}9; \quad v = 7{,}04.$$

XXIII. Berechnung des Inhalts und weiterer Stücke im Dreieck.

1. Berechne die Inhalte der Dreiecke in XXII, 1—4; 9—12; § 45. 20—24; 29—33.

2. Es sei der Inhalt eines Dreiecks $J = 1537$ gegeben und:

a) $a = 82{,}5$ und $b = 70{,}09$;
b) $a = 46$ und $\sphericalangle \alpha = 34^0 58'$;
c) $\sphericalangle \alpha = 22^0 29'$ und $\sphericalangle \beta = 105^0$;

man soll die fehlenden Stücke des Dreiecks berechnen.

Andeutung zu a): Zeige auch durch Zeichnung, daß zwei Dreiecke möglich sind.

Andeutung zu b): Berechne $b \cdot c$ und $b^2 + c^2$ und hieraus $(b + c)$ sowie $(b - c)$.

[§ 45.] **3.** Wie läßt sich aus Formel XVIII (§ 45, 1) ableiten, welches Dreieck bei zwei gegebenen Seiten den größten Inhalt hat?

4. Welche Formel erhält man, wenn man Formel XVIII (S. 152) in dreifacher Weise anschreibt, wenn man dann zwei Ausdrücke miteinander vervielfacht und das Produkt durch den dritten teilt?

5. Wie leitet man den Satz in § 26, 4 (S. 93) aus Formel XVIII ab?

6. Wie läßt sich der Inhalt eines Vierecks durch seine Eckenlinien d und e und durch den von ihnen gebildeten Winkel φ ausdrücken?

7. a) Man soll den Inhalt eines Parallelogrammes durch zwei anstoßende Seiten a und b und den von denselben eingeschlossenen Winkel γ ausdrücken?

b) Dasselbe für eine Raute mit a und γ.

8. Welche Größen haben die Eckenlinien einer Raute, wenn deren Inhalt J und eine Seite a bekannt sind? — Beispiel: $J = 719$ und $a = 30{,}2$.

9. Wie berechnet man Seiten und Winkel eines Parallelogramms, dessen Eckenlinien e und f und Inhalt J bekannt sind?

Beispiel: $e = 59$, $f = 35{,}8$, $J = 808{,}7$.

10. Von einem Viereck seien zwei Gegenseiten a und c und die Winkel gegeben. Wie groß ist sein Inhalt?

Andeutung: Bringe die nicht gegebenen Seiten zum Durchschnitt und benütze § 45, 2 zweimal.

11. Leite die in § 27, 8 (S. 99) gefundene Formel für den Flächeninhalt eines Sehnenvierecks auf trigonometrischem Wege ab.

Andeutung: Berechne eine Eckenlinie zweimal und aus der hieraus folgenden Gleichung den Cosinus des ihr gegenüberliegenden Winkels.

12. AM und CQ sind zwei der äußeren Grenzlinien zweier Grundstücke, die in den Strecken AB und BC aneinander grenzen. Man soll letztere Grenze durch eine von A ausgehende gerade Grenze AD ersetzen. Wie groß muß $CD = x$ auf CQ werden, wenn $BC = a$, $AB = c$, $\sphericalangle ABC = \beta$ und $\sphericalangle BCQ = \delta$ gegeben sind? (Beispiel: $\sphericalangle \beta = 60^0$, $\delta = 30^0$.)

13. Von einem rechtwinkeligen Dreieck sind die Katheten a, b gegeben. Wie groß ist die Halbierende des rechten Winkels im Dreieck?

14. Von einem Dreieck, dessen Seiten a, b, c (9, 16, 24) gegeben sind, soll die Halbierende des Gegenwinkels zu c berechnet werden.

15. Beweise, daß im beliebigen Dreieck folgende Gleichungen gelten:

a) $4r \cdot \varrho \cdot s = a \cdot b \cdot c$;

b) $\varrho_1 = b \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} : \sin\frac{\beta}{2}$;

[§ 45.]

c) $\dfrac{\varrho_1 + \varrho}{\varrho_1 - \varrho} = \dfrac{\cos\frac{\beta - \gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{b + c}{a}$;

d) $\dfrac{\varrho_2 - \varrho_3}{\varrho_2 + \varrho_3} = \dfrac{\sin\frac{\beta - \gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{b - c}{a}$;

e) $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho = 4r$;

f) $\varrho_1 + \varrho_1 + \varrho_3 - 3r = r \cdot (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) = r + \varrho$.

16. Man soll aus den folgenden Angaben die Stücke eines Dreiecks berechnen, und zwar in Rückführung auf die vier Grundaufgaben über Dreiecke:

a) $a + b,\ a - b,\ \gamma$; b) $a + b,\ a - b,\ c$; c) $a - b,\ b - c,\ s$;

d) $a + b + c,\ a - b,\ b - c$; e) $a,\ \alpha - \beta,\ \gamma$; f) $a + b,\ \frac{a}{b},\ \gamma$.

17. Ebenso wie in Nr. 16, jedoch durch Benützung rechtwinkeliger Dreiecke:

a) $h_1,\ b,\ c$; b) $h_1,\ b,\ \beta$; c) $h_1,\ \alpha,\ \beta$;

d) $h_1,\ a,\ b$; e) $h_1,\ a,\ \beta$; f) $h_1,\ b,\ \alpha$;

g) $h_1,\ c_1,\ b$; h) $h_1,\ h_2,\ a$; i) $b + c,\ h_1,\ \beta$;

h) $a + b,\ h_1,\ J$; l) $a,\ m_1,\ h_1$; m) $w_1,\ h_1,\ c$.

18. Ebenso wie in Nr. 16, jedoch unter Benützung von passenden Hilfsdreiecken:

a) $a,\ b,\ m_1$; b) $a,\ \beta,\ w_2$; c) $w_1,\ \alpha,\ \beta$;

d) $a,\ \alpha,\ b + c$; e) $a,\ \beta,\ b + c$; f) $\alpha,\ \beta,\ b + c$;

g) $a,\ \gamma,\ b - c$; h) $\alpha,\ \gamma,\ b - c$; i) $a + b + c,\ \alpha,\ \beta$;

k) $c,\ b,\ m_1$; l) $m_1,\ m_2,\ a$; m) $a + b + c,\ h_1,\ \beta$.

XXIV. Anwendung der Dreiecksrechnung auf Vermessungen.

§ 46. Vorbemerkung. Das Feldmessen (die praktische Geometrie, Topographie, Geodäsie), aus dem sich wohl in Ägypten die reine Geomerie entwickelte, hat die Aufgabe, die gegenseitige Lage der Orte eines Bezirks festzustellen, teils zur Bestimmung der Größe der Grundstücke, teils zum Entwurf von Plänen und Karten. Die Orte werden durch Signale (Pfähle, Stäbe, Stangen, Steine, Türme) bezeichnet. Zum Messen der Strecken benützt man zwei hölzerne Meßlatten von 5 m Länge, die abwechselnd aneinander gelegt werden. Wo es sich um genauere Messungen handelt, gebraucht man Meßstangen aus Metall, welche wagrecht auf Böcke gelegt werden und deren kleiner Abstand jeweils durch

[§ 46.] einen Meßkeil (siehe Aufg. III, 3) gemessen wird. Zum Wagrechtlegen benützt man eine Libelle; diese besteht aus einer Glasröhre (oder Dose), die in Messing gefaßt und mit einer Flüssigkeit (Äther) fast vollständig gefüllt und so in der Mitte gekrümmt ist, daß bei wagrechter Lage die Blase über der Flüssigkeit in der Mitte steht. — Die genaueste Längenmessung ist notwendig zur Bestimmung der Grundlinie (Basis) einer Landesvermessung. Es wird hierzu eine etwa 10 km lange Standlinie möglichst genau gemessen. Von den Endpunkten der Standlinie aus werden die Winkel der Standlinie mit den Sehlinien nach andern Punkten bestimmt und von letzteren wieder die Winkel nach weiteren Punkten. Auf diese Weise wird ein Netz von Dreiecken erster Ordnung* über das Land gelegt, deren Seitenlängen die ein- bis dreifache Länge der Grundlinie haben und an die sich dann Dreiecke zweiter und dritter Ordnung mit geringerer Seitenlänge anschließen. Zur Bestimmung der Lage der Netzpunkte werden deren Abstände vom Meridian und Parallelkreis der Sternwarte des Landes berechnet. An die so bestimmten Punkte knüpfen sich dann die Messungen mit Meßlatten und Kreuzscheibe für die kleinsten Bezirke an.

Als Winkelmeßinstrument dient der Theodolit. Dieser hat eine kreisförmige Scheibe (Alhidade), die mit einer Libelle durch drei Fußschrauben wagrecht gestellt wird und um eine lotrechte Achse drehbar ist. Die Größe der Drehung dieser Scheibe wird auf einem sie umfassenden Rand (Limbus), der mit einer Kreisteilung versehen ist, abgelesen (Horizontalwinkel) mit Hilfe zweier auf der Scheibe befindlichen Nonien (vgl. I. Teil, Aufg. IV, 18). Die Scheibe trägt die Lager einer wagrechten Achse, mit der ein Fernrohr und ein lotrechter geteilter Kreis verbunden ist, der Höhen- oder Vertikalkreis, dessen Nonius an dem Lager der Achse befestigt ist. Dieser Kreis dient zur Messung von Höhenwinkeln bei Höhenbestimmungen. Um das Fernrohr wagrecht zu stellen, ist auch dieses mit einer Libelle versehen. Das Ganze ruht auf einem zusammenlegbaren Dreifuß.

§ 46, A. **1.** Zwei Orte A und B, zwischen denen man nicht hin und her sehen kann, sollen durch eine geradlinige Straße (Tunnel) verbunden werden. Man wählt den seitlich gelegenen Punkt C und mißt $AC = 168$ m, $BC = 137{,}5$ m und $\sphericalangle C = 74^0 29'$. Wie lang wird die Strecke und welche Winkel macht sie mit AC und BC?

2. Wenn in Fig. 161 (S. 155) die Strecken CA, CB, a_1, b_1, c_1 die Größe 122, 464, 102, 61, 109 haben, wie groß ist AB?

---

*) Siehe das Kärtchen am Ende des Buches und vergleiche Aufgabe XXII, 5. Außer der Grundlinie Speyer-Oggersheim (19794,5 m) wurde zur Prüfung die Elsässer Grundlinie Sausheim-Oberhergheim (19044,387 m) benützt, die eine Übereinstimmung bis 8,3 Milliontel ergab. Nach Osten wurde angeschlossen an die Linie Ludwigsburg-Solitüde (13032,144 m), nach Norden an Darmstadt-Griesheim (7749,538 m).

3. Um die Breite AB eines Flusses zu bestimmen, mißt man [§ 46, A.] am einen Ufer eine durch B gehende, beiderseits B sich erstreckende zu AB senkrechte Strecke $QR = 150$ m und die Sehwinkel nach A bei $Q = 40^0$ und bei $R = 61^0$. Wie groß ist AB?

4. Um die Breite AB eines Flusses zu bestimmen, sei auf der Verlängerung von AB ein Punkt C gewählt und von ihm aus unter dem $\sphericalangle\, \gamma$ eine Strecke $CF = n$ gemessen und außerdem noch $\sphericalangle\, CFA = \alpha$ und $CFB = \beta$. Wie groß ist AB?

Beispiel: $n = 33$; $\sphericalangle\, \alpha = 105^0 40'$; $\sphericalangle\, \beta = 65^0$; $\sphericalangle\, \gamma = 49^0 37'$.

5. Die Grenzpunkte einer Strecke $LM = a$ sind unzugänglich. Es sollen aber ihre Entfernungen von einem seitlich liegenden Punkt V bestimmt werden, wobei L und M von V aus sichtbar seien. Zu diesem Zweck wählt man auf der Verlängerung von LM einen zugänglichen Punkt S und mißt allein die Winkel $LVM = \alpha$, $MVS = \beta$ und $VSM = \gamma$. Wie groß sind LV und MV?

Beispiel: $a = 44{,}5$ m; $\sphericalangle\, \alpha = 70^0$; $\sphericalangle\, \beta = 14^0$; $\sphericalangle\, \gamma = 31^0$.

6. Die Länge einer Strecke AB, die nur bei A zugänglich ist, soll bestimmt werden. Man mißt unter einem Winkel $BAY = 62^0 24'$ eine Strecke $AY = 48$ m und in Y unter dem Winkel $AYZ = 117^0 36'$ die Strecke $YZ = 69{,}4$ m und noch den Winkel $YZB = 108^0$. Wie groß ist AB? — Andeutung: Ziehe die zu ZB Parallele durch Y usw.; oder benütze den Schnittpunkt zweier Gegenseiten.

7. Die Größe der nur bei P zugänglichen Strecke PQ soll bestimmt werden.

a) Man mißt hierzu seitwärts von P aus $PR = 79{,}08$ m und andrerseits von PQ die Strecke $PS = 62{,}9$ m, ferner die Winkel

$$RPS = 99^0 59', \quad \sphericalangle\, PSQ = 67^0 2{,}5', \quad \sphericalangle\, PRQ = 60^0 20'.$$

b) Es können auch PR und PS auf derselben Seite von PQ angenommen werden ($\sphericalangle\, RPQ < SPQ$); dann sei $\sphericalangle\, RPS = 9^0 10'$, alles Übrige ungeändert wie bei a).

Andeutung: Bezeichne die Teile des $\sphericalangle\, RPS$ durch x und y und berechne PQ zweimal.

8. Man befindet sich auf einer Flußinsel und soll die Breite AB des Flusses bestimmen. Man mißt auf der Insel in der ungefähren Flußrichtung eine Strecke $QR = l$ und in deren Grenzpunkten die Winkel $\alpha = AQR$, $\beta = RQB$, $\gamma = QRA$, $\delta = BRQ$. — Beispiel:

$$l = 28{,}7; \quad \alpha = 91^0 50'; \quad \beta = 71^0 43'; \quad \gamma = 58^0 29'; \quad \delta = 74^0.$$

9. Es soll in Fig. 162 (S. 156) AB berechnet werden, während die gemessenen Stücke seien:

a) $a = 38$; $\alpha = 86^0 20'$; $\beta = 23^0$; $\alpha_1 = 48^0 50'$; $\beta_1 = 129^0$.

b) $a = 250{,}6$; $\alpha = 118^0 34'$; $\beta = 56^0 2'$; $\alpha_1 = 34^0 35'$; $\beta_1 = 90^0 1'$.

[§ 46, A.] c) In welcher Beziehung steht die Aufgabe Nr. 8 zu den vorstehenden a) und b)?

10. Man wünscht die Entfernungen zwischen drei unzugänglichen Punkten A, B, C kennen zu lernen. Man stellt sich deshalb in gerader Linie mit AB auf, mißt dann die Strecken p und q, längs welcher man sich, senkrecht zu AB, seitwärts begeben muß, um erst mit A und C, dann mit B und C in einer Geraden zu sein; in den neuen Stellungen mißt man die Sehwinkel α und β für AB. Es ist zu zeigen, wie die gewünschten Strecken gefunden werden können. — Beisp.: $p = 8{,}9$; $q = 16$; $\alpha = 103^0$; $\beta = 99^0$.

11. a) Von zwei Standpunkten C und D aus (Fig. 162, S. 156), sieht man nach den Grenzpunkten einer bekannten Strecke $AB = l$ und mißt die Winkel $ACD = \alpha$, $BCD = \beta$, $CDA = \alpha_1$, $CDB = \beta_1$. Wie lang ist CD?

Für die folgenden Beispiele soll zuerst die ungefähr entsprechende Figur gezeichnet, dann CD berechnet werden:

a) $l = 280$; $\alpha = 91^0 30'$; $\beta = 23^0$; $\alpha_1 = 41^0$; $\beta_1 = 123^0 52'$.

b) $l = 301{,}9$; $\alpha = 96^0$; $\beta = 51^0 42'$; $\alpha_1 = 19^0 48'$; $\beta_1 = 53^0$.

c) $l = 196{,}5$; $\alpha = 74^0 20'$; $\beta = 36^0$; $\alpha_1 = 57^0 44'$; $\beta_1 = 41^0 30'$.

11. b) Zur Lösung der Hansenschen Aufgabe § 46, 4, (S. 156, Fig. 162) weise man nach, daß der Winkel $DAB = \varphi$ durch die Gleichung bestimmt ist:

$$\frac{\sin(\beta_1 - \alpha_1 + \varphi)}{\sin\varphi} \cdot \frac{\sin(\alpha + \alpha_1)}{\sin\alpha} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(\beta + \beta_1)} = 1$$

und daß dann:

$$CD = \frac{c \sin\varphi \sin(\beta + \beta_1)}{\sin(\beta_1 - \alpha_1) \sin\beta}.$$

Beispiel ohne Log: $\alpha = 75^0$, $\beta = 45^0$, $\alpha_1 = 30^0$, $\beta_1 = 90^0$.
Ergebnis: $\varphi = 60^0$, $CD = c$.

12. Wie weit ist ein Punkt S von drei Punkten A, B, C einer Geraden entfernt, wenn $AB = l_1$, $BC = l_2$ und $\sphericalangle ASB = \alpha_1$, $\sphericalangle BSC = \alpha_2$ gemessen sind?

Beispiel:

a) $l_1 = 17{,}93$; $l_2 = 26$; $\alpha_1 = 42^0$; $\alpha_2 = 46^0 53'$.

b) $l_1 = 201{,}5$; $l_2 = 109{,}5$; $\alpha_1 = 28^0 9'$; $\alpha_2 = 43^0 21'$.

13. Nach dem Plan einer Stadt liegen die 3 Punkte T, K, M in einer Geraden, deren wagrechte Abstände aus diesem Plan entnommen wurden: $TK = 950$ m, $KM = 625$ m. Um die Lage des neuen, nicht in dem Plan verzeichneten Gebäudes G zu bestimmen, wurden von seiner Plattform aus die Winkel $TGK = 45^0 59'$ und $KGM = 23^0 13'$ gemessen. Wie lang ist GK, GT und GM?

14. In Fig. 163 (S. 156) soll die Entfernung des Punktes D [§ 46, A]. von A (oder B oder C) berechnet werden, wenn gegeben ist:

a) $a = 30$; $b = 31$; $\gamma = 101^0$; $\alpha = 26^0$; $\beta = 29^0$.

b) $a = 14$; $b = 44$; $\gamma = 106^0 15{,}6'$; $\alpha = 18^0 55{,}5'$; $\beta = 67^0 22{,}8'$.

c) $a = 861$; $b = 162{,}5$; $\gamma = 120^0 30{,}6'$; $\alpha = 91^0 22{,}8'$; $\beta = 18^0 55{,}5'$.

d) $a = 19{,}45$; $b = 12{,}07$; $\gamma = 262^0 40'$; $\alpha = 13^0 27'$; $\beta = 32^0 10'$.

e) $a = 45$; $b = 32{,}89$; $\gamma = 72^0 35'$; $\alpha = 142^0 9{,}8'$; $\beta = 68^0\ 7'$.

Zeichne zuerst die Figur nach den gegebenen Maßen.

15. Am 6. Dezember 1751 beobachtete Lalande in Berlin (geogr. Breite $52^0 31{,}2'$ nördl.) den Abstand des Mondes von der Lotrichtung $= 41^0 15\frac{3}{4}'$ beim Durchgang durch die Mittagslinie, während gleichzeitig Lacaille am Cap (geogr. Breite $33^0 55\frac{1}{4}'$ südl.) diesen Abstand $= 46^0 33{,}6'$ fand. Es soll berechnet werden, wieviele Erdhalbmesser der Mond vom Erdmittelpunkt entfernt war unter der (nur annähernd geltenden) Voraussetzung, daß beide Orte auf einerlei Mittagslinie liegen.

16. Auf einer Geraden liegen aufeinander folgend die Punkte A, B, C, D, und es sei gemessen $AB = a = 1234$, $CD = b = 964$, außerdem kennt man die Winkel, unter welchen die Strecken AB, BC, CD von einem seitlich gelegenen Punkte S aus erscheinen; nämlich $\sphericalangle\,\alpha = 25^0 42'$, $\sphericalangle\,\beta = 48^0 19'$. $\sphericalangle\,\gamma = 32^0 56'$. Wie groß ist $BC = x$?

---

17. Ein auf einer wagrechten Ebene stehender Turm SF er- § 46, B. scheint von einem Punkt A der Ebene aus unter einem Höhenwinkel $\alpha = 30^0$, und wenn man sich ihm um 40 m nähert bis B, erscheint er unter dem Höhenwinkel $\beta = 60^0$. Wie hoch ist die Spitze S des Turmes über dem Auge des Beobachters? und wie weit ist seine Entfernung von B?

18. Neben der Bahnlinie nach Schwetzingen, die 109 m über dem Meeresspiegel in wagrechter Richtung gegen die Lotlinie des Königstuhlturmes verläuft, wurden an zwei Kilometersteinen, deren Abstand 1500 m, die Erhebungswinkel nach der Zinne des Turmes gemessen: $\alpha = 7^0 27\frac{1}{2}'$, $\beta = 5^0 19'$. Wie hoch liegt letzterer Punkt über dem Meeresspiegel?

19. Zur Mittagsstunde beobachtet man nach Süden eine Wolke unter dem Höhenwinkel α, während der der Sonne β ist; zugleich ist der Schatten der Wolke vom Beobachter um a Meter entfernt (nord- oder südwärts?). Wie hoch schwebt die Wolke?

Beispiele:

a) $\sphericalangle\,\alpha = 25^0 59'$, $\sphericalangle\,\beta = 28^0 55'$, $a = 89$ m.

b) $\sphericalangle\,\alpha = 30^0\ 6'$, $\sphericalangle\,\beta = 28^0 55'$, $a = 58$ m.

[§ 46, B.] **20.** Vom Fuß F eines Turmes FS aus führt eine geradlinige Straße gleichmäßig fallend bergabwärts, und man hat auf ihr $FA = a$ und $AB = b$ gemessen, außerdem den Winkel $FAS = \alpha$ und $FBS = \beta$. a) Wie hoch ist FS? b) Wie stark geneigt ist die Straße? — Beisp.:
$a = 12{,}9$; $b = 18{,}5$; $\alpha = 68^0 19'$; $\beta = 47^0 58'$.
$a = 24$; $b = 28$; $\alpha = 35^0 50'$; $\beta = 19^0 30'$.

21. Ein auf einer wagrechten Ebene stehender Turm (z. B. der zu Pisa) sei gegen Norden geneigt. Von zwei Punkten A und B aus, die um a und b genau nach Süden vom Fuß des Turmes abstehen, erscheint dessen Spitze unter den Höhenwinkeln α und β. Wie stark geneigt ist der Turm? und wie hoch ist er?

Beispiel: $a = 30$ m, $b = 58{,}5$ m; $\sphericalangle\, \alpha = 58^0 3'$, $\beta = 40^0 57'$.

22. Betrachtet man einen Turm von einem südwärts davon gelegenen Punkt A, so erscheint er unter dem Höhenwinkel 30^0; geht man von A aus westwärts nach B um die Strecke a, so erscheint der Turm von B aus unter dem Höhenwinkel 18^0. Man soll zeigen, daß die Höhe des Turmes $= a : \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}$.

23. Von A aus sieht man 2 Berggipfel B und C in gleicher lotrechter Ebene hinter und übereinander unter den Erhebungswinkeln von 15^0 nnd $22\frac{1}{2}^0$, während C von B aus unter dem Winkel 30^0 erscheint. Wenn der wagrechte Abstand der Lotlinien von B und A 1,5 km ist, wie hoch liegt C über A?

24. Von einem Punkt der Talebene aus sieht man einen Berg B um den Winkel $\beta = 2^0 9'$ über einen näher befindlichen Berg A hervorragen, welch letzterer sich um $\alpha = 8^0 24'$ über den Horizont zu erheben scheint. Man bewegt sich nun wagrecht so auf die Berge zu, bis A den Berg B deckt und findet dies nach einem Wege $c = 1725$ m. Der Höhenwinkel ist dann $\gamma = 12^0 17'$. Wie hoch sind beide Berge? Welches ist in Luftlinie die Entfernung der beiden Bergspitzen?

25. Eine von A aus nach Südwesten hin und h Meter über A gelegene Bergspitze S erscheint in A unter dem Höhenwinkel α. Unter welchem Höhenwinkel erscheint S von B aus, wenn B um b Meter südlich (oder nördlich) von A liegt?

Beispiel: $h = 450$ m; $\alpha = 7^0 7'$; $b = 1\frac{1}{2}$ km.

26. Von einem in einem Tal gelegenen Standpunkt S aus mißt man die Höhenwinkel α und β zweier Bergspitzen A und B und auch den Grundriß γ des Sehwinkels ASB auf die wagrechte Ebene. Wenn noch die Höhe der Berge über der Wagrechten gleich a und b bekannt ist, wie groß ist die Luftlinie AB?

Beispiel:

$\alpha = 7^0 58'$; $\beta = 10^0 24'$; $\gamma = 139^0 45'$; $a = 240$; $b = 1480$.

27. Man betrachtet die Entfernung AB zweier Felsenriffe so-

wohl vom Fuß F als von der Spitze S eines vom Meeresspiegel aus [§ 46, B.] sich erhebenden Leuchtturmes. Man kennt $SF = h$ und mißt

$$\sphericalangle ASF = \alpha, \quad \sphericalangle BSF = \beta, \quad \sphericalangle AFB = \gamma.$$

Wie groß ist die Entfernung AB?

Beispiel: $h = 25{,}4$ m; $\alpha = 60^0 8'$; $\beta = 71^0 56'$; $\gamma = 101^0 30'$.

28. Um die Höhe eines Gebäudes SF zu bestimmen, mißt man an drei Standpunkten A, B, C, welche in einer Geraden, und zwar in der durch F gehenden wagrechten Ebene liegen, die Höhenwinkel α, β, γ zu der Spitze S des Gebäudes. Wenn noch $AB = a$, $BC = b$ gemessen wird, wie hoch ist das Gebäude?

Beispiel: $a = 56$; $b = 32{,}8$; $\alpha = 10^0 2'$; $\beta = 48^0 54'$; $\gamma = 29^0 30'$.

---

29. Ein Stück Feld hat die Gestalt ABC (Fig. 171, S. 160) und § 46, C. soll durch eine Gerade XY im Verhältnis $p : q$ geteilt werden. Gegeben ist:

a) $AB = 145$; $BC = 120{,}8$; $\sphericalangle B = 68^0$; $\sphericalangle \delta = 90^0$; $p : q = 1 : 1$;

b) $AB = 137$; $\sphericalangle A = 72^0$; $\sphericalangle B = 59^0$; $\sphericalangle \delta = 99^0$; $p : q = 1 : 2$,

und dabei soll erstens der kleinere Abschnitt oder zweitens der größere Abschnitt an AC zu liegen kommen.

c) $AB = 98$; $BC = 106$; $CA = 86{,}9$; $\sphericalangle \delta = 106^0 50'$; $p : q = 3 : 7$.

30. Im Viereck $ABCD$ (Fig. 172, S. 161) sei $AB = 19$, $BC = 23$, $CD = 15{,}4$ und $\sphericalangle \beta = 100^0$, $\sphericalangle \gamma = 120^0 30'$, $\sphericalangle \varepsilon = 87^0$, $p : q = 2 : 3$. Wohin fällt die teilende Gerade XY?

31. Von einer Straße gehen in den Punkten P nnd Q zwei Grenzen PR und QS eines Feldes aus; es sei $PQ = a$, $\sphericalangle QPR = \gamma$, $\sphericalangle SQP = \delta$ gegeben. Man soll durch eine Parallele zu PQ ein Stück abschneiden, dessen Inhalt $= J$ gegeben sei.

Aufgaben zum elften Kapitel.

XXV. Funktionen eines beliebigen Winkels.

1. a) Bestimme Punkte, deren Koordinaten in mm gegeben sind, § 47. nämlich:

Punkt	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Abszisse	+ 9	− 9	− 9	+ 9	− 15	− 6	− 15
Ordinate	+ 15	+ 15	− 15	− 15	+ 6	+ 18	− 12

b) Bestimme mit dem Winkelmesser die Winkel, welche die nach

[§ 47.] diesen Punkten gehenden Strahlen mit der positiven Richtung der Achse bilden.

2. Zeichne von einer Achse aus Winkel von 70^0, 136^0, 208^0, 283^0 trage auf jedem Fahrstrahl vom Nullpunkt aus 30 mm ab und bestimme die Koordinaten des Endpunktes.

3. In welchem Viertel sind die Abszissen und Ordinaten a) positiv und negativ? b) negativ und positiv? c) negativ und negativ?

§ 48. **4.** Welche Größe haben die einzelnen Funktionen der Winkel, welche die nach den Punkten in Nr. 1 gehenden Fahrstrahlen mit der positiven Richtung der Achse bilden?

5. Welchem Viertel gehört ein Winkel an, dessen a) sin und cos negativ? b) cotg und sin negativ? c) cos und tg negativ? d) sin positiv und tg negativ? e) cos negativ und cotg positiv?

6. Welches Vorzeichen hat jede der folgenden Größen und durch welche Funktionen spitzer Winkel lassen sie sich ausdrücken?

a)	b)	c)	d)
$\sin 150^0$	$\cos 105^0$	$\sin 252^0$	$\text{tg}\ 120^0$
$\cos 240^0$	$\cos 300^0$	$\cos 144^0$	$\text{cotg}\ 252^0$
$\sin 198^0$	$\sin 337\frac{1}{2}^0$	$\cos 352^0$	$\text{tg}\ 330^0$

e)	f)	g)
$\text{cotg}\ 205^0$	$\text{tg}\ 315^0$	$\cos 199^0 24$
$\text{cotg}\ 165^0$	$\text{cotg}\ 157\frac{1}{2}^0$	$\text{tg}\ 333^0 19'$
$\text{tg}\ 234^0$	$\text{tg}\ 135^0$	$\sin 283^0 50'$.

7. Es ist z. B. $\sin 250^0 = -\sin 70^0 = -\cos 20^0$.

Drücke ebenso in zweifacher Weise die folgenden Funktionen durch solche von Winkeln des ersten Viertels aus:

a) $\sin 138^0$; b) $\cos 257^0$; c) $\text{tg}\ 301^0$; d) $\text{cotg}\ 146^0$;
e) $\sin 256^0 28'$; f) $\cos 277^0 42'$; g) $\text{tg}\ 123^0 45'$; h) $\text{cotg}\ 341^0 58'$.

8. Es ist auch z. B.

$$\sin 250^0 = -\sin 70^0 = -\sin 110^0 = +\sin 290^0 =$$
$$= -\cos 20^0 = +\cos 160^0 = +\cos 200^0 = -\cos 340^0.$$

Drücke ebenso in achtfacher Weise die in Nr. 7 angegebenen Funktionen aus.

9. Für welchen Winkel eines andern Viertels hat jede der folgenden Funktionen denselben Wert:

a) $\sin 28^0$; b) $\cos 76^0$; c) $\text{tg}\ 82^0$; d) $\text{cotg}\ 12^0$; e) $\sin 238^0$;
f) $\text{cotg}\ 170^0$; g) $\text{tg}\ 91^0$; h) $\cos 328^0$; i) $\sin \alpha$?

10. Wie lassen sich die Funktionen der folgenden Winkel als Funktionen spitzer Winkel ausdrücken?

a) 395^0; b) 449^0; c) 487^0; d) $567^0 18'$; e) 700^0; f) $618^0 24'$; g) 1000^0.

11. Bestimme mit Hilfe der in § 35, 3 (S. 128) gegebenen Werte [§ 48.] die Funktionen von

a) 120^0, 210^0, 300^0; b) 150^0, 240^0, 330^0; c) 135^0, 225^0, 315^0;
d) 108^0, 198^0, 288^0; e) 165^0, 255^0, 345^0; f) 126^0, 216^0, 306^0;
g) 144^0, 234^0, 324^0; h) $112\frac{1}{2}^0$, $202\frac{1}{2}^0$, $292\frac{1}{2}^0$; i) $157\frac{1}{2}^0$, $247\frac{1}{2}^0$, $337\frac{1}{2}^0$;
k) 105^0, 195^0, 285^0; l) 165^0, 255^0, 345^0.

12. Bestimme die beiden Winkel zu den Funktionswerten in Aufg. XXI, 2 und in folgenden Gleichungen:

a) $\sin x = -0{,}1937$ ($\sphericalangle x = 191^0 10'$ oder $348^0 50'$)
b) $\operatorname{tg} x = -0{,}7860$ ($\sphericalangle x = 141^0 50'$ oder $321^0 50'$)
c) $\cos x = -0{,}9769$ d) $\operatorname{cotg} x = -3{,}2041$
e) $\sin y = 0{,}7294$ f) $\operatorname{tg} y = -15{,}61$
g) $\operatorname{cotg} y = 0{,}1733$ h) $\operatorname{cotg} y = -1{,}402$
i) $\cos y = -0{,}5831$ k) $\sin y = 0{,}1507$.

13. Wie groß ist: a) $\sin x$, wenn $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{3} - 2$? b) $\cos 105^0$, § 49. wenn $\sin 210^0 = -\frac{1}{2}$? c) $\sin x$ und $\cos x$, wenn $\operatorname{tg} 2x = -\frac{24}{7}$?

14. Löse die Aufgabe 11 durch Zerlegung der Winkel (vgl. XXI, 3).

XXVI. Bestimmung von Winkeln aus Gleichungen.

§ 50.

1. $\sin\alpha \cdot \sin 72^0 = \frac{1}{4}\sqrt{5}$.
2. $\sin 54^0 \cdot \sin\alpha = \frac{1}{4}$.
3. $\cos 54^0 \cdot \cos\alpha = \frac{1}{4}\sqrt{5}$.
4. $\operatorname{tg} 18^0 \cdot \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{1}{5}}$.
5. $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg} 60^0 = 2$.
6. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg} 60^0 = 2$.
7. $\sin 18^0 + \sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.
8. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = 4$.
9. $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\cos\alpha} = \operatorname{tg} 54^0$.
10. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$.
11. $2\sin\alpha = \sqrt{6}\,(1 + \cos\alpha)$.
12. $\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha = 1 + \cos\alpha$.
13. $\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{3}$.
14. $\operatorname{cotg} x = 2 \cdot \cos x$.
15. $\sin x + \cos x = 1$.
16. $\sin^2 x + \frac{1}{4} = 2 \cdot \cos x$.
17. $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 2$.
18. $2 \cdot \sin^2 x - 3 \cdot \cos x = 0$.
19. $\sin x = a \cdot \sin y$ und $\operatorname{tg} x = b \cdot \operatorname{tg} y$.
20. $\sin(x + \gamma) - \cos x \cdot \sin\gamma = \cos\gamma$.
21. $\sin(x + \gamma) + \cos(x - \gamma) = \cos(x + \gamma)$.
22. $\sin x \cdot \sin(\gamma \quad x) = a$.
23. $\sin(x - y) = \cos(x + y) = \frac{1}{2}$.
24. $\operatorname{tg}(x + y) = p$, $\operatorname{tg}(x - y) = q$.
25. $\sin 2x = 2\sin x$.

